

Matemática Avanzada

Segundo Examen Parcial - 10/06/2024

Apellido y nombres: L.U.Nº:

Realizar los ejercicios en hojas separadas, con nombre y apellido.

Firmar la hoja al finalizar cada ejercicio.

Todos los ejercicios deberán estar debidamente justificados.

- Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n + 6i}{2^n}$ converge uniformemente en $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
- (a) Hallar el desarrollo de Laurent de $f(z) = \frac{4}{z(z+4)}$ alrededor de $z_0 = 3i$ que converge en $z_1 = -i$. Indicar la región de convergencia de este desarrollo.
- (a) Determinar y clasificar todas las singularidades de las siguientes funciones. Si la singularidad es evitable, definir la función de manera tal que en ese punto resulte holomorfa.

i. $f(z) = z^4 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right).$

ii. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2}(z-1) \right)}{(z-1)(z-2)}$

(b) Aplicando el teorema de los residuos, hallar el valor de las siguientes integrales.

i. $\int_{\partial B_1(0)} z^4 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz,$

ii. $\int_{\partial B_4(1)} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2}(z-1) \right)}{(z-1)(z-2)} dz.$

- Hallar la imagen de la banda $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$ bajo la transformación $w = \frac{2}{1-z}$.
- Sea $f(x) = 1-x$, $0 \leq x \leq 1$.
 - Hallar la extensión impar de $f(x)$ y obtener la serie de Fourier.
 - Graficar la función a la cual converge el desarrollo obtenido en el inciso (a).
 - Calcular la suma de las siguientes serie

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}$

- Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias.

(a) $\int_0^1 \frac{\cos \left(\frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x}} dx,$

(b) $\int_1^{+\infty} e^x (x+1) dx.$