

Apellido y Nombre: _____

E-mail: _____ Nro de registro: _____

RESOLUCIÓN

El siguiente documento presenta una posible resolución (s.e.u.o) de **ALGUNOS** de los ejercicios planteados en el primer examen parcial de LFyA 2014

Ejercicio 1:

Considere las siguientes propiedades. Demuestre si son verdaderas o no.

a) $\wp(A) \cap \wp(B) \subseteq \wp(A \cap B)$ b) $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$

Recordar: $\wp(S)$ es el conjunto potencia de S .

Ejercicio 2: Una barra de chocolate viene en una tableta rectangular con n pastillas. La barra o un pedazo obtenido a partir de ella sólo se puede quebrar a lo largo de una de las líneas verticales u horizontales que separan las pastillas que lo componen.

Asumiendo que sólo se puede quebrar un pedazo a la vez, determine cuántos quiebres se necesitan para separar las n pastillas y pruébelo por inducción. Asuma que el rectángulo de la tableta inicial puede ser arbitrario de $p \times q$ tal que $n=pq$.

Solución 1

Dada una tableta rectangular de n pastillas ($n=pq$, con p y q enteros positivos) probaremos por inducción (sobre la cantidad de pastillas) que se necesitan $n-1$ quiebres para separar las n pastillas

En caso que la tableta rectangular tenga 1 pastilla, no es necesario realizar ningún quiebre, ya que la única pastilla ya está suelta. Dicho de otra forma se necesitan 0 (cero) quiebres (i.e ningún quiebre).

Suponemos que en caso de estar en presencia de una tableta rectangular con m pastillas ($1 < m < k$) necesitamos $m - 1$ quiebres para separar las m pastillas.

Consideremos una tableta T con k pastillas. La tableta es rectangular, así que asumamos que sus dimensiones son a y b , donde $ab=k$. Podemos partir la tableta en dos, siguiendo una línea horizontal o vertical. Supongamos que partimos la tableta (sobre el lado de dimensión a) de forma tal que quedan dos tabletas rectangulares más pequeñas, $T1$ y $T2$.

Podemos decir que $T1$ tiene dimensiones xb (y por lo tanto tiene xb pastillas) y que $T2$ tiene dimensiones yb (y por lo tanto tiene yb pastillas), de forma tal que:

1) $x+y = a$

2) $xb+yb =k$.

Observemos que $1 < xb < k$ y que $1 < yb < k$.

Podemos decir entonces que las pastillas de $T1$ pueden separarse en $xb-1$ quiebres, y las pastillas de $T2$ pueden separarse en $yb-1$ quiebres.

Por lo tanto, las pastillas de la tableta original T , pueden separarse con una cantidad de quiebres igual a:

$$1 + (xb - 1) + (yb - 1)$$

Esto es, un quiebre para obtener $T1$ y $T2$, mas los quiebres para separar las pastillas que conforman $T1$, y los quiebres para separar las pastillas que conforman $T2$.

Luego, como

$$1 + (xb - 1) + (yb - 1) = xb + yb - 1 = k - 1$$

decimos que la cantidad de quiebres necesarios para separar las pastillas de la tableta T son $k-1$

Por lo tanto, en general para una tableta rectangular de n pastillas ($n>0$) necesitamos $n-1$ quiebres para separar las pastillas que la conforman.

Solución 2

Dada una tableta rectangular de n pastillas ($n=pq$, con p y q enteros positivos) probaremos por inducción (sobre una de las dimensiones de la tableta, en particular sobre p) que se necesitan $n-1$ quiebres para separar las n pastillas. Dicho de otra forma se necesitan $pq-1$ quiebres.

Para el caso de una tableta de dimensiones $1 \times q$, la tableta tiene q pastillas. Para separar las q pastillas es necesario realizar $q-1$ quiebres.

Consideremos que estamos ante una tableta T de dimensiones $(k+1)q$. En este caso, la tableta T , puede partirse (separando una fila completa) de forma tal de obtener dos tabletas:

- $T1$ de dimensiones $1 \times q$ y,

- $T2$ de dimensiones $k \times q$.

Como ya se dijo, las pastillas de una tableta $T1$ pueden obtenerse en $q-1$ quiebres, y asumiendo que las pastillas de una tableta de dimensiones kq pueden obtenerse en $kq-1$ quiebres, podemos decir que las pastillas de una tableta como T pueden separarse con una cantidad de quiebres igual a:

$$1 + (q-1) + (kq-1)$$

Esto es, un quiebre para obtener $T1$ y $T2$, mas los quiebres para separar las pastillas que conforman $T1$, y los quiebres para separar las pastillas que conforman $T2$.

Luego, como

$$1 + (q-1) + (kq-1) = q + kq - 1 = q(k+1) - 1 = (k+1)q - 1$$

decimos que la cantidad de quiebres necesarios para separar las pastillas de la tableta T son

$$(k+1)q - 1$$

Por lo tanto, en general para una tableta rectangular de pq pastillas ($pq > 0$) necesitamos $pq-1$ quiebres para separar las pastillas que la conforman.

Ejercicio 3: Lógica

Dada la siguiente fórmula bien formada: $(C \rightarrow (J \wedge M)) \wedge ((J \vee M) \rightarrow R) \rightarrow (C \rightarrow R)$

a) Probar que es válida usando prueba condicional (directa)

1.	$C \rightarrow (J \wedge M)$	premisa
2.	$(J \vee M) \rightarrow R$	premisa
3.	C	premisa de subprueba: $C \rightarrow R$
4.	$J \wedge M$	1,3 y MP
5.	J	simplificación de 4
6.	$J \vee M$	adición de 5
7.	R	6,2 y MP
8.	$C \rightarrow R$	3,7 y PC (fin de subprueba)
9.	$(C \rightarrow (J \wedge M)) \wedge ((J \vee M) \rightarrow R) \rightarrow (C \rightarrow R)$	1,2,8 y PC

b) Probar que es válida usando una prueba indirecta

1.	$C \rightarrow (J \wedge M)$	premisa
2.	$(J \vee M) \rightarrow R$	premisa
3.	$\neg(C \rightarrow R)$	premisa de prueba indirecta
4.	$C \wedge \neg R$	equivalencia 3
5.	C	simplificación de 4
6.	$J \wedge M$	5,1 y MP
7.	J	simplificación de 6

- | | |
|--|------------------------------|
| 8. $J \vee M$ | adición de 7 |
| 9. R | 8,2 y MP |
| 10. $\neg R$ | simplificación de 4 |
| 11. $R \wedge \neg R$ | conjunción 9 y 10 |
| 12. falso | equivalencia 11 |
| 13. $(C \rightarrow (J \wedge M)) \wedge ((J \vee M) \rightarrow R) \rightarrow (C \rightarrow R)$ | 1,2,3, 12 y prueba indirecta |

Dada la siguiente fórmula bien formada: $(J \vee M) \rightarrow R$

c) Dar una fbf en FNC completa que sea equivalente

Obtenemos la FNC completa por equivalencias

1. $(J \vee M) \rightarrow R$
2. $\neg(J \vee M) \vee R$
3. $(\neg J \wedge \neg M) \vee R$
4. $(\neg J \vee R) \wedge (\neg M \vee R)$
5. $(\neg J \vee R \vee (M \wedge \neg M)) \wedge (\neg M \vee R \vee (J \wedge \neg J))$
6. $(\neg J \vee R \vee M) \wedge (\neg J \vee R \vee \neg M) \wedge (\neg M \vee R \vee (J \wedge \neg J))$
7. $(\neg J \vee R \vee M) \wedge (\neg J \vee R \vee \neg M) \wedge (\neg M \vee R \vee J) \wedge (\neg M \vee R \vee \neg J)$
8. $(\neg J \vee R \vee M) \wedge (\neg J \vee R \vee \neg M) \wedge (\neg M \vee R \vee J)$

d) Dar una fbf en FND completa que sea equivalente

Obtenemos la FNC completa por equivalencias

1. $(J \vee M) \rightarrow R$
2. $\neg(J \vee M) \vee R$
3. $(\neg J \wedge \neg M) \vee R$
4. $(\neg J \wedge \neg M \wedge (R \vee \neg R)) \vee (R \wedge (J \vee \neg J) \wedge (M \vee \neg M))$
5. $(\neg J \wedge \neg M \wedge R) \vee (\neg J \wedge \neg M \wedge \neg R) \vee (R \wedge (J \vee \neg J) \wedge (M \vee \neg M))$
6. $(\neg J \wedge \neg M \wedge R) \vee (\neg J \wedge \neg M \wedge \neg R) \vee ((R \wedge J) \vee (R \wedge \neg J)) \wedge (M \vee \neg M)$
7. $(\neg J \wedge \neg M \wedge R) \vee (\neg J \wedge \neg M \wedge \neg R)$
 $\vee [(R \wedge J) \wedge (M \vee \neg M)] \vee [(R \wedge \neg J) \wedge (M \vee \neg M)]$
8. $(\neg J \wedge \neg M \wedge R) \vee (\neg J \wedge \neg M \wedge \neg R)$
 $\vee [(R \wedge J \wedge M) \vee (R \wedge J \wedge \neg M)] \vee [(R \wedge \neg J \wedge M) \vee (R \wedge \neg J \wedge \neg M)]$
9. $(\neg J \wedge \neg M \wedge R) \vee (\neg J \wedge \neg M \wedge \neg R) \vee (R \wedge J \wedge M) \vee (R \wedge J \wedge \neg M) \vee (R \wedge \neg J \wedge M)$

Ejercicio 4:

Considere las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto $S=\{a,b,c,d\}$.

$R1 = \{ \}$	$R2 = \{(x,x): x \in S\}$	$R3 = R2 \cup \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$
$R4 = R3 - R2$	$R5 = R3 \cap \{(a,b), (b,a), (c,d), (d,c)\}$	$R6 = R3 \circ R4$

a) calcular las siguientes clausuras

$r(R1)$ $r(R3)$ $t(R4)$ $t(R5)$ $t(s(R4))$

Solución:

$$r(R1) = \{(x,x): x \in S\}$$

$$r(R3) = R3$$

$$t(R4) = t(\{(a,b),(b,c),(c,d)\}) = \{(a,b),(b,c),(c,d), (a,c), (b,d), (a,d)\}$$

$$t(R5) = R5 = \{(a,b), (d,c)\}$$

$$t(s(R4)) = \{(x,y): x,y \in S\}$$

b) para las relaciones $R1$, $R2$ y $R3$, dar los grafos que las representan

c) para las relaciones $R4$, $R5$ y $R6$, dar las matrices de adyacencia que la representan

Ejercicio 5

Para cada uno de los siguientes incisos, dar una relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$ lo más pequeña posible (i.e con la menor cantidad de pares ordenados posibles) que satisfaga las propiedades mencionadas.

- a) no reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica
- b) transitiva, no reflexiva, no simétrica
- c) no reflexiva, no irreflexiva, no transitiva, no simétrica

Ejercicio 6:

Algoritmo F1 (n,y) % calcula $y \cdot n!$

$r \leftarrow y$

$i \leftarrow 1$

while ($i < n$)

do $r \leftarrow r * i$

$i \leftarrow i + 1$

return ($r * i$)

a) Encontrar una invariante adecuada, y probar que el algoritmo retorna correctamente $y \cdot n!$.

b) (*punto extra*) Probar por inducción que la invariante encontrada es correcta.

a) Invariante: $Q: r = y(i-1)!$

Correctitud del algoritmo: al finalizar el bucle vale $Q \wedge \neg(i < n)$ por lo tanto como

$$\begin{aligned} Q \wedge \neg(i < n) &\equiv (r = y(i-1)!) \wedge \neg(i < n) \\ &\equiv (r = y(i-1)!) \wedge (i = n) \\ &\equiv (r = y(n-1)!) \end{aligned}$$

al finalizar el bucle vale que $r = y(n-1)!$.

Como a continuación, el algoritmo retorna el valor $r * i$, está retornando el valor

$$y(n-1)! * i \equiv y(n-1)! * n \equiv y \cdot n!$$

Por lo tanto, como el algoritmo retorna el valor esperado y decimos que es correcto.