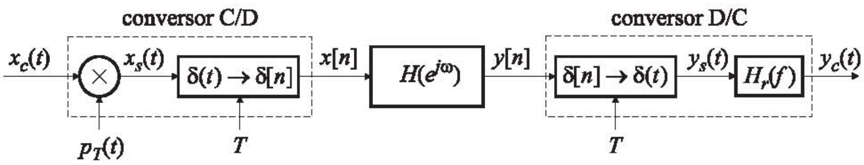
Nombre: ....L.U.: ....

Procesamiento Digital de Señales - Segundo Parcial - 24 de noviembre de 2011

1. En el sistema discreto de procesamiento de señales de tiempo continuo de la Figura $H(e^{j\omega})$ es un filtro pasabajos ideal discreto con frecuencia de corte $\omega_c = 0.6\pi$. Si $x_c(t) = \text{sen}(2\pi 1000\ t) + 3\cos(2\pi 3500\ t)$, y la frecuencia de muestreo del sistema es $f_s = 1/T = 4000$ Hz
   (*a*) Grafique detalladamente el espectro $X_c(f)$ de $x_c(t)$.
   (*b*) Calcule y grafique el espectro $X_s(f)$ de la señal muestreada continua $x_s(t)$.
   (*c*) Calcule y grafique el espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal discreta $x[n]$.
   (*d*) Calcule y grafique el espectro $Y(e^{j\omega})$ de la señal discreta $y[n]$ a la salida del filtro $H(e^{j\omega})$.
   (*e*) Calcule y grafique el espectro $Y_s(f)$ de la señal muestreada continua $y_s(t)$.
   (*f*) Calcule y grafique el espectro de la señal continua de salida $y_c(t)$. Escriba la expresión analítica de la señal $y_c(t)$.
   (*g*) Si el filtro reconstructor $H_r(f)$ se reemplaza un mantenedor de orden cero (MOC),
      i. Especifique la respuesta impulsiva del mantenedor.
      ii. Calcule la respuesta en frecuencia del mantenedor.
      iii. Indique los efectos sobre la señal de salida $y_c(t)$.



2. La sucesión

$$x[n] = 5\,2^n u[-n-1] - 3u[n]$$

se aplica al sistema caracterizado por la ecuación a diferencias

$$y[n] = x[n-2] - (3/2)\,y[n-1], \qquad y[-1] = c.$$

   (*a*) Calcule $X(z)$, la transformada z de $x[n]$, determine su región de convergencia, y dibuje el diagrama de polos y ceros.
   (*b*) Calcule $H(z)$, la transformada z del sistema caracterizado por la ecuación a diferencias. Determine las regiones de convergencia posibles, y el valor del a condición inicial $y[-1]$ compatible con cada una de ellas.
   (*c*) Discuta la estabilidad y causalidad del sistema en cada una de las regiones de convergencia.
   (*c*) Calcule la salida del sistema **causal** cuando se lo excita con la entrada $x[n]$, y exprésela de la manera más compacta posible.
   (*d*) ¿Cuál es la salida de estado estacionario?

3. Se debe diseñar un filtro de fase lineal generalizada (FLG) que bloquee completamente las componentes frecuenciales de frecuencia ω_0 y π.
   (*a*) El filtro será FIR o IIR? ¿porqué?
   (*b*) ¿Cuál es el mínimo orden del sistema que permite satisfacer los requisitos de diseño?
   (*c*) Grafique los polos y ceros del sistema.
   (*d*) Calcule la función de sistema $H(z)$ del filtro de modo que la ganancia en $\omega = 0$ sea unitaria.
   (*e*) Determine la respuesta impulsiva $h[n]$.
   (*f*) Encuentre la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y exprésela como $H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j(\omega\alpha+\beta)}$, identificando $A(\omega)$, α y β.
   (*g*) ¿Cuál es el retardo de grupo del filtro?
   (*h*) Escriba la ecuación a diferencias que caracteriza al sistema.

4. La sucesión $x[n]$ está formada por N muestras de la señal $A_0\,\text{sen}(\omega_0 n+\phi_0) + A_1\,\text{sen}(\omega_1 n+\phi_1)$, con $0 < \omega_0 < \omega_1 < \pi$. Esta sucesión se "pesa" con la ventana temporal $w[n]$, y la señal "ventaneada" se completa con ceros para formar la sucesión $y[n]$ de $M > N$ puntos de longitud. Si la transformada discreta de Fourier $Y[k]$ de $y[n]$ tiene dos picos en los índices k_0, k_1, donde $0 < k_0 < k_1 < M/2-1$, es decir

$$Y[k_0] = Y_0 e^{j\theta_0} \qquad Y[k_1] = Y_1 e^{j\theta_1},$$

   encuentre aproximadamente A_0, ω_0, ϕ_0, A_1, ω_1, ϕ_1 en función de Y_0, θ_0, Y_1, θ_1, M, N y $w[n]$. Esta solución ¿es única?

Serie de Fourier (SF)	Transformada de Fourier (TF)	Transf. de Fourier de señales discretas (TFTD)	Transf. Discreta de Fourier (TDF)
$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$	$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
Varios	$\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k = \frac{1-\rho^N}{1-\rho}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$	$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}$	

dominio frecuencial (Ω)		dominio temporal		dominio frecuencial (f)
$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_k X_c\left[\frac{1}{T_s}(\omega - 2\pi k)\right]$	$\Leftrightarrow$	$x[n] = x_c(nT_s)$	$\Leftrightarrow$	$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_k X_c\left[\frac{f_s}{2\pi}(\omega - 2\pi k)\right]$
$Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$	$\Leftrightarrow$	$y[n] = x[n] * h[n]$	$\Leftrightarrow$	$Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$
$Y_s(\Omega) = Y(e^{j\omega})\Big\vert_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega T s}}$	$\Leftrightarrow$	$y_s(t) = \sum_n y[n]\delta(t - nT_s)$	$\Leftrightarrow$	$Y_s(f) = Y(e^{j\omega})\Big\vert_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f T s}}$
$Y_r(f) = H_r(\Omega) Y_s(\Omega) = T_s H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)\Big\vert_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega T s}}$	$\Leftrightarrow$	$y_r(t) = \sum_n y[n] h_r(t - nT_s)$	$\Leftrightarrow$	$Y_r(f) = H_r(f) Y_s(f) = T_s\, H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)\Big\vert_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f T s}}$
$H_c(\Omega) = \begin{cases} H\left(e^{j\omega}\right)\Big\vert_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega T s}}, & \text{si } \lvert\Omega\rvert < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$				$H_c(f) = \begin{cases} H\left(e^{j\omega}\right)\Big\vert_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f T s}}, & \text{si } \lvert f\rvert < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T_s}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$

$$z^N = re^{j\theta} \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[N]{r}\, e^{j\frac{\theta+2\pi k}{N}},\ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Transformada Bilineal:	$s = \frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}$, $\quad z = \frac{(2/T+s)}{(2/T-s)}$, $\quad \omega = 2\arctan(\pi f T_d)$, $\quad f = \frac{1}{\pi T_d}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
Invariación al impulso:	$h[n] = T_d\, h_c(t)\big\vert_{t=nT_d}$