Nombre y Apellido: .... DNI:..................................
Carrera: ....

Justificar claramente **todas** las respuestas.
Enumerar las hojas, agregar firma y aclaración en la última hoja.

1. (a) Calcular, si existen, valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente función f resulta continua en todo su dominio. $f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \leqslant a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$
   (b) Para la función del inciso anterior considerando $a = 0$.
      i. Hallar la derivada de la función f obtenida.
      ii. ¿Existe $f'(0)$?
   (c) Sea $5x^3 + xy^2 + y^3 = -1$. Hallar la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de coordenadas $(-1, 2)$.

2. (a) Los catetos de un triángulo rectángulo se incrementan a razón de 3 y 5 cm por segundo, respectivamente. En el momento en que un cateto miden 10 cm y el otro 8 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del triángulo?
   (b) Comprobar que la función $g(x) = e^{x^2-3x}$ cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 3]$. Determinar todos los valores de c que cumplen con la conclusión del teorema.
   (c) Determinar las constantes reales a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 1$.

3. (a) Dibujar la región encerrada por la gráfica de la curva $y = \dfrac{1}{4}x^3$ y la recta $y = x$. Calcular el área de la región obtenida.
   (b) Calcular, si existen, las siguientes integrales:
      i. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$,
      ii. $\displaystyle\int_0^2 x^2 \ln x \; dx$.

4. (a) Sea $a_n = \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n$. Determinar la convergencia de: (i) $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
   (b) Estudiar el comportamiento de las siguientes series:
      i. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2+n+5}$,
      ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n+4}{4^{n+1}}$.

   Si la serie del inciso ii. es convergente, calcular su suma.