UNS-PRIMER PARCIAL MATEMÁTICA AVANZADA- 29/04/2024

TEMA I

APELLIDO/S:.................................... **NOMBRE/S:..................................**

LU:................ **NOTA:...........................**

Resolver los ejercicios en hojas separadas, con letra clara y prolija.Justificando adecuadamente.

1. Estudia la convergencia y hallá el valor principal de Cauchy de

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1).(x^2-2x+1)}\,dx$$

2. Utilizando la función Gamma,Betta o identificando la integral con la transformada de Laplace. Calcular a la siguiente integral:

$$\int_{o}^{2} \frac{t^3}{\sqrt{2-t}}\,dt$$

3. a) Halla $\mathcal{L}\{F(t)\}(s)$ sabiendo que: $F(t) = \begin{cases} e^{3t} & Si \quad 0 \leq t < 5 \\ & \\ t.cos(4.(t-5)) & Si \qquad t \geq 5 \end{cases}$

   b) Encontrar la solución del problema $Y''(t) + 4Y'(t) + 3Y(t) = e^{-t}$, $Y(0) = Y'(0) = 0$ suponiendo que Y y sus derivadas tienen transfomada de Laplace

4. Hallar si existe el límite de las siguientes funciones, en los puntos indicados:

   a) $f(z) = \dfrac{z|z|}{\overline{z}}$, $z_0 = 0$

   b) $g(z) = g(x+iy) = \dfrac{(x+1)(y-2)}{(x+1)^2 + i(y-2)^2}$, $g_0 = -1 + 2i$

5. Hallar, si existen, las regiones donde las funciones son continuas, derivables, holomorfas. En los puntos donde sea posible, calcular su derivada:

   a) $f(z) = f(x+iy) = x - 4xy^2(1-i)$

   b) $f(z) = \dfrac{z+i}{z^4-1}$

Ejercicio	1	2	3	4	5
Cantidad de hojas					

Ejercicios 1 y 2

1. Ejercicio 1

Enunciado: estudiar la convergencia y hallar el valor principal de Cauchy de

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)(x^2-2x+1)}\,dx.$$

Resolución: Primero que nada observemos que $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Por lo tanto

$$I=\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)(x^2-2x+1)}\,dx=\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx.$$

Ahora bien, la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ es un cociente de funciones continuas: 1 (continua por ser constante) y $(x-1)^3$ (continua por ser polinómica). Teniendo en cuenta que $(x-1)^3$ solo se anula en $x=1$, podemos concluir que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Entonces

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx=\int_{-2}^{1} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx+\int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx=I_1+I_2.$$

Luego, I será convergente si y solo si I_1 e I_2 lo son. Comenzemos estudiando I_1. Puesto que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^3}=-\infty,$$

entonces I_1 es una integral impropia de segunda especie. Aplicando la definición

$$I_1=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{-2}^{1-\delta} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx.$$

Cálculo Auxiliar: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$. Realizando el cambio de variables $u=x-1$, $du=dx$ obtenemos que

$$\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx=\int \frac{1}{u^3}\,du=\frac{-1}{2u^2}+c=\frac{-1}{2(x-1)^2}+c.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\delta \to 0^+} \int_{-2}^{1-\delta} \frac{1}{(x-1)^3}\, dx = \lim_{\delta \to 0^+} \left. \frac{-1}{2(x-1)^2} \right|_{-2}^{1-\delta} \\ &= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1}{2(1-\delta-1)^2} - \frac{-1}{2(-2-1)^2} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1}{2(-\delta)^2} - \frac{-1}{2(-3)^2} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Luego I_1 diverge, y en consecuencia I también lo hace.

Ahora estudiemos el valor principal de Cauchy. Porlo estudiado previamente, sabemos que $1/(x-1)^3$ es seccionalmente continua en $[-2,1)$ y $(1,2]$ pero no lo es en $[-2,2]$. Asi, aplicando la definición de valor principal de Cauchy tenemos que

$$\begin{aligned} V.P. \int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)(x^2-2x+1)}\, dx &= \lim_{\delta \to 0^+} \int_{-2}^{1-\delta} \frac{1}{(x-1)^3}\, dx + \int_{1+\delta}^{2} \frac{1}{(x-1)^3}\, dx \\ &= \lim_{\delta \to 0^+} \left. \frac{-1}{2(x-1)^2} \right|_{-2}^{1-\delta} + \left. \frac{-1}{2(x-1)^2} \right|_{1+\delta}^{2} \\ &= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1}{2(1-\delta-1)^2} - \frac{-1}{2(-2-1)^2} + \frac{-1}{2(2-1)^2} - \frac{-1}{2(1+\delta-1)^2} \\ &= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{-1}{2\delta^2} - \frac{-1}{2(-3)^2} + \frac{-1}{2(1)^2} - \frac{-1}{2(\delta)^2} \\ &= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{18} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Luego el valor principal de Cauchy de la integral es $-4/9$.

2. Ejercicio 2

Enunciado: Utilizando la función Gamma, Beta o identificando la integral con la transformada de Laplace, calcule la siguiente integral:

$$\int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{2-t}}\, dt.$$

Resolución: podemos reescribir la integral como

$$\int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{2-t}}\, dt = \int_0^2 t^3 (2(1-t/2))^{-1/2}\, dt = 2^{-1/2} \int_0^2 t^3 (1-t/2)^{-1/2}\, dt.$$

De esta forma, queda más en claro la similitud de la misma con la funcón Beta

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Haciendo el cambio de variables $u = t/2$, $du = dt/2$, como $0 < t < 2$, entonces $0 < t/2 < 1$ de donde $0 < u < 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} 2^{-1/2} \int_0^2 t^3 (1 - t/2)^{-1/2} \, dt &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (2u)^3 (1-u)^{-1/2} 2 \, dt \\ &= \frac{16}{\sqrt{2}} B(4, 1/2) \\ &= 8\sqrt{2} \frac{\Gamma(4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(4+1/2)} \end{aligned}$$

Usando las propiedades de la función *Gamma* vemos que

- $\Gamma(4) = 3! = 6$.
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- $\Gamma(9/2) = \frac{7}{2}\Gamma(7/2) = \frac{35}{4}\Gamma(5/2) = \frac{105}{8}\Gamma(3/2) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$.

Finalmente

$$\int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{2-t}} \, dt = 8\sqrt{2} \frac{\Gamma(4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(4+1/2)} = 8\sqrt{2} \frac{6\sqrt{\pi}}{105/16\sqrt{\pi}} = \frac{256}{35}\sqrt{2}.$$

3 a) $F(t) = \begin{cases} e^{3t} & si\ 0 \leq t < 5 \\ t\cos(4\cdot(t-5)) & si\ t \geq 5 \end{cases}$

$$F(t) = [1 - H(t-5)].e^{3t} + H(t-5).[t\cos(4(t-5))]$$

$$F(t) = e^{3t} - H(t-5).\underbrace{e^{3t}}_{F_1(t-5)} + H(t-5)\underbrace{[t.\cos(4.(t-5))]}_{F_2(t-5)}$$

$$F_1(t-5) = e^{3t} = e^{3[(t-5)+5]} = e^{3(t-5)+15} \Rightarrow f_1(t) = e^{3t+15}$$

$$F_2(t-5) = t\cos(4(t-5)) = ((t-5)+5).\cos(4(t-5)) \Rightarrow F_2(t) = (t+5)\cos(4(t))$$

$$L\{F(t)\}_{(s)} = L\{e^{3t} - H(t-5).F_1(t-5) + H(t-5)F_2(t-5)\}_{(s)}$$

$$\text{P5} \longrightarrow = \frac{1}{s-3} - e^{-5s}.L\{e^{15}.e^{3t}\}_{(s)} + e^{-5s}.L\{t\cos(4t) + 5\cos(4t)\}_{(s)}$$

$$\text{P6} \longrightarrow = \frac{1}{s-3} - e^{-5s}.e^{15}\frac{1}{s-3} + e^{-5s}.\left[(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+16}\right) + 5\frac{s}{s^2+16}\right]$$

$$= \frac{1}{s-3} - \frac{e^{-5s}.e^{15}}{s-3} + e^{-5s}.\left[-\frac{16-s^2}{(s^2+16)^2} + \frac{5s}{s^2+16}\right]$$

$$= \frac{1}{s-3} + e^{-5s}\left[\frac{-e^{15}}{s-3} - \frac{16-s^2}{(s^2+16)^2} + \frac{5s}{s^2+16}\right]$$

CA =

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+16}\right) = \frac{s^2+16-s.2s}{(s^2+16)^2} = \frac{16-s^2}{(s^2+16)^2}$$

3b $\quad y''(t)+4y'(t)+3y(t)=e^{-t} \qquad y(0)=y'(0)=0$

$$\mathcal{L}\{y''(t)+4y'(t)+3y(t)\}(s)=\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \longleftarrow P1$$

$$s^2 y(s)-s\cancel{y(0)}-\cancel{y'(0)}+4.(sy(s)-\cancel{y(0)})+3y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+4s+3)\,y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$(s+1)(s+3)\,y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$y(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+3)} \quad CA$$

$$y(s)=\frac{-1/4}{s+1}+\frac{1/2}{(s+1)^2}+\frac{1/4}{s+3}$$

CA

$s^2+4s+3=(s+1)(s+3)$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+3)}$$

$1=A(s+1)(s+3)+B(s+3)+C(s+1)^2$

si $s=-1$ $\quad 1=B(-1+3)$

$1/2=B$

si $s=-3$ $\quad 1=C.(-3+1)^2$

$1/4=C$

si $s=0$

$1=A.1.3+1/2.3+1/4.1$

$1-3/2-1/4=3A$

$-1/4=A$

Como

$$\lim_{s\to+\infty} y(s)=0 \qquad \lim_{s\to+\infty}\left(\frac{-1/4}{s+1}+\frac{1/2}{(s+1)^2}+\frac{1/4}{s+3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/4}{s+1}+\frac{1/2}{(s+1)^2}+\frac{1/4}{s+3}\right\}(t)$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t)+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}(t)+\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t)$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}.e^{-t}.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t)+\frac{1}{4}e^{-3t} \longleftarrow P3$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}.t+\frac{1}{4}e^{-3t}$$

(4) a) $f(z) = \frac{z \cdot |z|}{\bar{z}}$ Sabemos que: $\lim_{z \to 0} |f(z)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} f(z) = 0.$

$$\lim_{z \to 0} \left| \frac{z|z|}{\bar{z}} \right| = \lim_{z \to 0} \frac{\cancel{|z|} \cdot |z|}{\cancel{|\bar{z}|}} = 0.$$

$|z| = |\bar{z}|$

Como

$\Rightarrow \lim_{z \to 0} |f(z)| = 0 \Rightarrow \lim_{z \to 0} f(z) = 0.$

(4) b) $g(z) = g(x+iy) = \frac{(x+1)(y-2)}{(x+1)^2 + i(y-2)^2}$ $g_0 = -1 + 2i$ $\lim_{z \to g_0} g(z)$

$g(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

$$g(z) = g(x+iy) = \frac{(x+1)\cdot(y-2)}{(x+1)^2 + i(y-2)^2} \cdot \frac{(x+1)^2 - i(y-2)^2}{(x+1)^2 - i(y-2)^2} =$$

$$\frac{(x+1)^3(y-2) - i\,(x+1)\cdot(y-2)^3}{(x+1)^4 + (y-2)^4} = \underbrace{\frac{(x+1)^3(y-2)}{(x+1)^4+(y-2)^4}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{(x+1)(y-2)^3}{(x+1)^4+(y-2)^4}}_{v(x,y)}$$

Analizo $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)^3 \cdot (y-2)}{(x+1)^4 + (y-2)^4}$

uso direccionales $\rightarrow$ las rectas que pasan por el punto $(-1,2)$

Ec. de una recta que pasa por un punto $y = m\cdot(x - x_0) + y_0$

$y = m\cdot(x+1) + 2$ (Son las que pasan por $(-1,2)$)

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to -1 \\ y = m(x+1)+2}} \frac{(x+1)^3 \cdot (m(x+1) + \cancel{2} - \cancel{2})}{(x+1)^4 + (m(x+1) + \cancel{2} - \cancel{2})^4} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ y = m(x+1)+2}} \frac{\cancel{(x+1)^4} \cdot m}{\cancel{(x+1)^4} \cdot [1+m^4]}$$

$= \boxed{\frac{m}{1+m^4}}$ Como el límite direccional depende de m

$\Rightarrow$ decimos que el $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} u(x,y) = \nexists$

$\Rightarrow \lim_{z \to -1+2i} g(z) = \nexists$

Escaneado con CamScanner

Ejercicio n°5 Hallar, si existen, las regiones donde las funciones son continuas, derivables, holomorfas. En los puntos donde sea posible, calcular su derivada.

5a) $f(z) = f(x+iy) = x - 4x \cdot y^2 (1-i)$

Busco $u(x,y)$; $v(x,y)$

$f(x+iy) = x - 4xy^2(1-i) = (x-4xy^2) + 4xy^2 i$

entonces $\begin{cases} u(x,y) = x - 4xy^2 \\ v(x,y) = 4xy^2 \end{cases}$

Veo continuidad

aplicando Teorema:

$u(x,y), v(x,y)$ cont en (x_0,y_0) $\Rightarrow$ $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ cont en $z_0 = x_0 + iy_0$

$u(x,y) = x - 4xy^2$, $v(x,y) = 4xy^2$ continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas

$\Rightarrow$ $f(z)$ continua en $\mathbb{C}$.

Veo/analizo derivabilidad-$\mathbb{C}$

aplicando la "condición suficiente":

* u_x, u_y, v_x, v_y continuas en $(x_0,y_0) \in \mathcal{U}$
* Vale C-R en $(x_0,y_0) \in \mathcal{U}$

($\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ conj abierto)

$\Rightarrow$ $f := u + iv$ derivable-$\mathbb{C}$ en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$

$u_x = 1 - 4y^2$; $u_y = -8xy$

$v_x = 4y^2$; $v_y = 8xy$

$\rightarrow$ u_x, v_x, u_y, v_y continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas.

C-R: $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = v_x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-4y^2 = 8xy \\ -8xy = -4y^2 \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{\begin{cases} 1-4y^2 = 8xy \\ 8xy = 4y^2 \end{cases}}$ ← Planteo del "sistema" de ecuaciones C-R.

Resolución del sistema:

$8xy = 4y^2$

$\Rightarrow 8xy - 4y^2 = 0$

$y \cdot (8x - 4y) = 0$

$y = 0$ ó $8x - 4y = 0$

$\Rightarrow \boxed{y = 0 \text{ ó } y = 2x}$ → solución de 2° ecuación

Para cada opción, continuo buscando solución que también (simultáneamente) satisfaga 1° ecuación.

Si $y=0$ 1° ecuación: $1-4y^2 = 8xy$

$1 - 0 = 0$

$1 = 0$ Absurdo

Si $y=2x$ 1° ecuación: $1-4y^2 = 8xy$

$1-4(2x)^2 = 8x(2x)$

$1 - 16x^2 = 16x^2$

$1 = 32x^2$

$x^2 = 1/32$

$|x| = \sqrt{\frac{1}{32}}$ → $x = \sqrt{\frac{1}{32}}$ ó $x = -\sqrt{\frac{1}{32}}$

luego

✓ para $x = \sqrt{\frac{1}{32}} \rightarrow y = 2x = 2\sqrt{\frac{1}{32}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{8 \cdot 4}} = 2\frac{1}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

✓ para $x = -\sqrt{\frac{1}{32}} \rightarrow y = 2x = -2\sqrt{\frac{1}{32}} = \dots = -\frac{1}{\sqrt{8}}$

∴ VALE C-R en $z_1 = \sqrt{\frac{1}{32}} + \frac{1}{\sqrt{8}}i$ y en $z_2 = \sqrt{\frac{1}{32}} - \frac{1}{\sqrt{8}}i$

Conclusión:

" Como se cumple C-R en $z_1 = \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{1}{\sqrt{8}} i$ y en $z_2 = \frac{-1}{\sqrt{32}} - \frac{1}{\sqrt{8}} i$; y u_x, u_y, v_x, v_y continuos en $\mathbb{R}^2$ "

$\Rightarrow$ f es diferenciable - $\mathbb{C}$ en z_1 y en z_2.

Analizo holomorfidad

" f es diferenciable - $\mathbb{C}$ en dos puntos aislados
$\Rightarrow$ f no es holomorfa".

" f es diferenciable - $\mathbb{C}$ en $z_0 \in \{z_1, z_2\}$
pero no en un disco abierto $B_r(z_0)$
$\Rightarrow$ f no es holomorfa".

Cálculo derivada

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$$
$$= (1-4y^2) + i\, 8xy$$

$$f'(z_1) = \left(1 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2\right) + 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} i$$
$$= \left(1 - 4 \cdot \frac{1}{8}\right) + 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} i$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \cancel{8} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cancel{8}} i$$

Calc aux
$\sqrt{32} =$
$= \sqrt{4 \cdot 8}$
$= 2\sqrt{8}$

$$\Rightarrow \quad f'(z_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$f'(z_2) = \left(1 - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\right)^2 + 8 \cdot \frac{-1}{\sqrt{32}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{8}} i$$

$\Rightarrow$ $f'(z_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$ (análogo cálculo anterior)

5b) $f(z) = \dfrac{z+i}{z^4-1}$

Aplico propiedad de cociente de fcs holomorfas

↳ Teorema 4.3.4 pag 55 Notas Unidad 4.

✓ numerador: $z+i$ holomorfa en $\mathbb{C}$ por ser fc polinómica - $\mathbb{C}$.

✓ denominador: z^4-1 holomorfa en $\mathbb{C}$ por ser fc polinómica - $\mathbb{C}$.

✓ denominador no nulo:

$z^4 - 1 = 0 \rightarrow$ Resuelvo

Forma 1

$$z^4 - 1 = 0$$

$$z^4 = 1$$

$$z = \sqrt[4]{1} \rightarrow \text{Aplico Fórmula } \sqrt[n]{\omega} = \sqrt[n]{|\omega|}\, e^{i \cdot \frac{\text{Arg}\,\omega + 2K\pi}{n}} \quad K = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

$$\sqrt[4]{1} = \underbrace{\sqrt[4]{|1|}}_{=1} \cdot e^{i \frac{\overbrace{\text{Arg}\,1}^{=0} + 2K\pi}{4}} \quad K = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{1} = e^{i \frac{K\pi}{2}} = \cos\left(K\frac{\pi}{2}\right) + i \,\text{sen}\left(K\frac{\pi}{2}\right) \quad K = 0, 1, 2, 3$$

$K=0 \rightarrow z_0 = e^0 = \cos 0 + i \,\text{sen}\, 0 = 1$

$K=1 \rightarrow z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$K=2 \rightarrow z_2 = e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \,\text{sen}(\pi) = -1$

$K=3 \rightarrow z_3 = e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$

Forma 2 $\quad z^4 - 1 = 0 \rightarrow (z^2)^2 - 1 = 0$

$\rightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0 \rightarrow (z-1)(z+1) \cdot (z^2+1) = 0$

$\rightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \quad \therefore z=1, z=-1, z=i, z=-i$

Conclusión Luego, f es holomorfa en $\mathbb{C} - \{1, -1, i, -i\}$

Como holomorfa $\Rightarrow$ derivable-$\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ continua entonces

f es derivable-$\mathbb{C}$ y continua en $\mathbb{C} - \{1, -1, i, -i\}$.

Cálculo derivada

$$f'(z) = \left[\frac{z+i}{z^4-1}\right]' = \frac{(z+i)' \cdot (z^4-1) - (z+i)(z^4-1)'}{(z^4-1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \frac{1 \cdot (z^4-1) - (z+i) \cdot 4z^3}{(z^4-1)^2}} \leftarrow \text{LISTO.}$$

EXTRA $$f'(z) = \frac{z^4 - 1 - 4z^4 - i4z^3}{(z^4-1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \frac{-3z^4 - 4iz^3 - 1}{(z^4-1)^2}}$$

Adicional (no suelen aclararlo)

¿Qué sucede en $z_0 \in \{1, -1, i, -i\}$

En tales z_0 sucede lo siguiente:

$\nexists f(z_0)$ (el denominador se anula) $\Rightarrow$ f no cont en z_0

$\Rightarrow$ f no derivable-$\mathbb{C}$ en z_0 $\Rightarrow$ f no holomorfa en z_0.