Segundo examen parcial - Análisis Matemático I - Segundo cuatrimestre 2021

1. Considere la función $f(x) = x|x-1|$, responda a las siguientes consignas trabajando con la forma de la función definida por llaves.

   a) Determine el conjunto de puntos en los que la función es derivable. ¿Es derivable en $x = 1$?

   b) Determine los extremos relativos de la función y los intervalos de crecimiento/ decrecimiento.

   c) Determine los intervalos de concavidad.

2.

   a) Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme, a razón de 50 cm^3 por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15 cm?

   b) Considere la curva definida por la ecuación $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Halle el/los puntos donde la curva tiene recta tangente horizontal.

3. Calcule los siguientes límites usando la regla de L'Hopital.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(2x) - 2\operatorname{arc\,sen}(x)}{2x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + e^x)^{\operatorname{cosec} x}$

4.

   a) Considere la función $f(x) = xe^{1/x}$, calcule la derivada primera aplicando derivación logarítmica.

   b) Aproxime $\sqrt{(0{,}3)^7}$ utilizando un polinomio de Taylor de orden 3 adecuado. ¿Hasta qué orden es posible calcular tal aproximación?

   c) ¿Es posible aplicar el teorema del valor medio de Lagrange a la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$ en el intervalo $[0, 2]$? En caso afirmativo, halle el valor de c cuya existencia asegura el teorema.

5. Analice si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas. Justifique las respuestas: ya sea mostrando un contraejemplo o proporcionando un argumento basado en las herramientas teóricas que conoce, según corresponda.

   a) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones derivables tales que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $h(1) = \frac{1}{4}$, $h'(1) = 3$, entonces la derivada de la función $f(x) = h^2(1 - g(4x))$ en $x = 0$ es igual a -6.

   b) Si $f'(c) = 0$ entonces f tiene un extremo local en $x = c$.

   c) Si $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, entonces $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.

   d) Entre todos los números positivos x e y, cuyo producto es 121, la suma es máxima para $x = y = 11$.