

Circuitos de primer orden

6.1 Circuitos simples RC y RL sin fuentes

Respuesta natural: es la respuesta que tiene el circuito cuando no está conectado a fuentes independientes, por ello se dice que esta respuesta se debe enteramente a la energía inicialmente almacenada en el elemento de almacenamiento (inductor o capacitor).

Circuitos RC: $v(t) = V_0 e^{-(t/RC)}$

Circuitos RL: $i(t) = I_0 e^{-(\frac{R}{L})t}$

La resistencia no almacena energía, por lo tanto la energía total almacenada en el circuito en un momento t se debe a la energía almacenada en el capacitor.

La energía almacenada en el capacitor decae a cero con el correr del tiempo, esta energía es disipada en la resistencia como calor.

6.2 Constantes de tiempo

Circuitos RC: $\tau = RC$

Circuitos RL: $\tau = \frac{L}{R}$

Cada τ segundos la respuesta natural se reduce en un factor de $\frac{1}{e}$ en relación a su valor en $\tau - 1$.

La respuesta al final del primer τ se reduce a $e^{-1} = 0.368$ de su valor inicial, es decir se reduce al 37%. Luego del segundo τ se reduce al 13,5%, por consiguiente, después de cuatro o cinco constantes de tiempo, la respuesta es esencialmente cero.

Conocer la constante de tiempo nos permite predecir la forma general de la respuesta, pero para completar la solución debemos conocer el valor inicial V_0 o I_0 . Con frecuencia, necesitamos interruptores para determinar esto en un circuito. Puesto que las corrientes inductivas y los voltajes capacitivos son continuos, los valores deseados, justo después de la acción del interruptor en $0+$, pueden determinarse a partir del estado del circuito justo antes, en $t = 0-$.

Ver gráficos de decaimiento.

6.3 Circuitos generales de primer orden sin fuentes

Para circuitos en los que tenemos un elemento de almacenamiento o el equivalente de uno solo, acompañado de una resistencia o el equivalente a una (puede calcularse con métodos serie, paralelo, análisis de mallas o de nodos), sucede que todas sus respuestas decaen a cero con una constante de tiempo $\tau = RC$ o $\tau = L/R$. Sin embargo, nótese que los circuitos con dos o más elementos de almacenaje no siempre tienen un solo elemento de almacenaje equivalente, y por consiguiente no podrá descomponerse resolviendo una sola ecuación diferencial de primer orden. Estos no son circuitos de primer orden, y su respuesta no puede caracterizarse por una sola constante de tiempo. Entre los ejemplos de este caso se incluye cualquier circuito con capacitores e inductores.

6.4 Circuitos con fuentes DC

Para estos circuitos, obtenemos soluciones que son resultado de las potencias almacenadas iniciales, y de las potencias abastecidas continuamente por las fuentes. Obtendremos que las respuestas, en este caso, constan de dos partes, una de las cuales es, al igual que las fuentes en sí, una constante.

Un término forzado en una ecuación diferencial es un término $f(t)$ independiente de las funciones de tiempo que se desconocen.

Los siguientes métodos resuelven la ecuación diferencial forzada con condiciones iniciales dadas:

1. Utilizando una solución forzada tentativa igual a la constante desconocida A, y sustituirla en la ecuación diferencial forzada para obtener la solución forzada.
2. Utilizando una solución natural tentativa igual a Ke^{st} , sustituirla en la ecuación diferencial no forzada, y resolviendo la ecuación característica para s, por ej. al sustituirla obtengo $s + \frac{1}{RC} = 0$, despejando obtengo el valor para s.
3. La solución total es la suma de las soluciones natural y forzada. Evalúese la suma en el tiempo inicial e iguálase al valor inicial requerido para obtener K.

6.5 Superposición en circuitos de primer orden

La condición inicial es ciertamente una fuente de energía para la respuesta natural. $x_{ic}(t)$ es la respuesta natural a esta “fuente de condición inicial”, donde se eliminan las demás fuentes (independiente), y debe superponerse con la respuesta forzada $x_s(t)$ impulsada por estas fuentes independientes, para la que a su vez se elimina la fuente de condición inicial.

En el caso donde hay más de una fuente independiente, la superposición puede aplicarse para calcular $x_s(t)$, la respuesta forzada con las condiciones iniciales eliminadas. Es decir, la respuesta forzada $x_s(t)$ es la superposición de las respuestas a cada una de las fuentes independientes, con todas las demás eliminadas (incluyendo las condiciones iniciales).

6.6 La función escalón unitario

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 & t < 0 \\ &= 1 & t > 0 \end{aligned}$$

6.7 Respuestas en escalón y de pulso

Puesto que la fuente de escalón unitario presenta una función de fuente cero hasta el instante $t=0^-$, la respuesta en estado estable dc por el circuito en $t=0^-$, también debe ser cero. No puede haber potencia inicial almacenada en los elementos de almacenaje en el instante singular cuando la fuente cambia, porque no hay una fuente en $t < 0$ para energizar los elementos de almacenaje. Por consiguiente, la respuesta en escalón es la respuesta a la entrada de escalón unitario, sin que haya energía inicial almacenada en el circuito.

La multiplicación de cualquier otra función de tiempo por un escalón unitario fuerza el producto a ser cero antes del instante singular, y a ser igual a la otra función de tiempo después de esto.

Utilizaremos frecuentemente esta conveniente propiedad del escalón unitario para simplificar otras ecuaciones que surjan en capítulos subsiguientes.

La respuesta de pulso está estrechamente relacionada con la del escalón. Una combinación lineal de dos escalones unitarios puede ser utilizada para producir un pulso rectangular.

Circuitos de segundo orden

7.1 Circuitos con dos elementos de almacenamiento

Si el circuito tiene dos elementos de almacenamiento, un inductor y un capacitor, o dos del mismo tipo, pero no un equivalente en serie o en paralelo a un solo elemento, el circuito queda descrito por una ecuación diferencial de segundo orden.

Los dos elementos de almacenaje en un circuito de segundo orden pueden ser del mismo tipo o un inductor y un capacitor.

Si se pueden reemplazar dos o más elementos de almacenamiento del mismo tipo (inductores o capacitores) por un solo equivalente, cuenta como un solo elemento de almacenamiento para determinar el orden de la ecuación descriptiva.

7.2 Ecuaciones de segundo orden

Definimos los circuitos de segundo orden como aquellos con ecuaciones descriptivas que son ecuaciones diferenciales de segundo orden, dadas de modo general por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f(t)$$

Si x_n es la respuesta natural, debe satisfacer la ecuación diferencial no forzada (u homogénea).

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + a_1 \frac{dx_n}{dt} + a_0x_n = 0$$

Si x_f es la solución forzada, debe satisfacer la ecuación forzada original

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} + a_1 \frac{dx_f}{dt} + a_0x_f = f(t)$$

7.3 Respuesta natural

La forma tentativa para la solución natural: $x_n(t) = Ke^{st}$

Sustituyéndola en la ecuación diferencial: $Ke^{st}(s^2 + a_1s + a_0) = 0$

Para hallar la solución debemos encontrar las raíces del polinomio,

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1)^2 - 4a_0}}{2}$$

Luego, $x_n = x_{n1} + x_{n2} = K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t}$

Los números s_1 y s_2 se conocen como exponentes característicos del circuito, pueden ser números reales o complejos.

Podemos reescribir a $s^2 + a_1s + a_0$ como $s^2 + 2\zeta w_0s + w_0^2 = 0$, donde:

- Frecuencia natural no amortiguada: $w_0 = \sqrt{a_0}$
- Proporción de amortiguación: $\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$
- Exponentes característicos: $s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})w_0$

Si $\zeta < 1$ entonces los componentes característicos son complejos.

Si $\zeta > 1$ habrá dos componentes característicos reales.

Debido a que $\zeta = 1$ es la frontera entre dos comportamientos distintos se conoce como amortiguación crítica.

Caso sobreamortiguado ($\zeta > 1$):

Aquí los exponentes característicos s_1 y s_2 son reales y distintos, $s_1 = \sigma_1$ y $s_2 = \sigma_2$.

La respuesta natural es la suma de dos expresiones reales, $x_n(t) = K_1 e^{\sigma_1 t} + K_2 e^{\sigma_2 t}$.

Los dos exponentes característicos pueden ser positivos, negativos o cero. Sin embargo para circuitos compuestos solo por elementos pasivos impulsados por fuentes independientes, no es posible que el exponente característico sea positivo, porque $\sigma_{1,2} > 0$ implica que x_n crezca quizás indefinidamente, lo cual es imposible porque en un circuito pasivo con fuentes independientes eliminadas, la energía total almacenada en el circuito nunca puede incrementarse mas allá de la energía almacenada inicial.

La **amortiguación** es la pérdida gradual de la energía almacenada inicial. En el caso sobreamortiguado hay suficiente amortiguación para que cada termino en la respuesta natural pierda constantemente amplitud.

Caso subamortiguado ($\zeta < 1$):

Los exponentes característicos son complejos:

$s_1 = \sigma + j\omega$, $s_2 = \sigma - j\omega$ con $\omega \neq 0$, deben ser conjugados complejos.

$$x_n(t) = B_1 e^{\sigma t} \cos \omega t + B_2 e^{\sigma t} \sin \omega t$$

El caso subamortiguado consiste en dos términos que decaen en forma de oscilaciones sinusoidales de frecuencia ω . La amplitud de estas oscilaciones decae como $e^{\sigma t}$, de forma que la proporción de amortiguación varía inversamente respecto a σ .

Puesto que la amortiguación es oscilatoria en lugar de constante, esto se conoce como caso subamortiguado.

Caso no amortiguado ($\zeta = 0$):

De lo visto en subamortiguado, un caso extremo es $\sigma = 0$, que no produce ningún decaimiento. Este es el caso no amortiguado, que ocurre cuando la proporción de amortiguación $\zeta = 0$. La respuesta natural no amortiguada es un senoide de amplitud constante cuya frecuencia es $\omega = \omega_0$. Esto explica por que ω_0 se conoce como frecuencia natural no amortiguada.

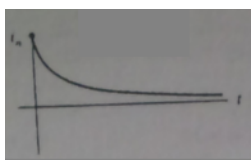
Caso críticamente amortiguado ($\zeta = 1$):

Los exponentes característicos son reales e iguales, $s_1 = s_2 = \sigma$

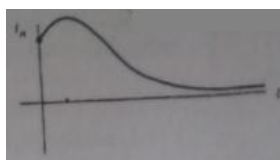
Forma tentativa: $x_n = h(t)e^{\sigma t}$, para ver si funciona sustituimos x_n en la ecuación diferencial no forzada. Como resultado vemos que queda satisfecha si y solo si $\frac{d^2 h}{dt^2} = 0$.

Esta ecuación en $h(t)$ tiene soluciones: $h(t) = K_1$ y $K_2 t$.

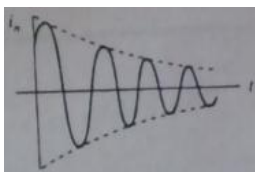
Nuestra forma tentativa modificada para este caso es: $x_n(t) = K_1 e^{\sigma t} + K_2 t e^{\sigma t}$, se conoce como forma t-multiplicada. La solución natural en el caso críticamente amortiguado consiste en la suma de un término exponencial y su forma t-multiplicada asociada.



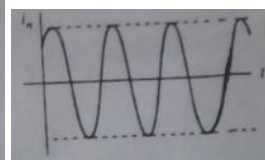
Sobreamortiguado



Críticamente amortiguado



Subamortiguado



No amortiguado

7.4 Respuesta forzada

La respuesta forzada x_f del circuito general de segundo orden debe satisfacer la ecuación diferencial o forzada:

$$\frac{d^2 x_f}{dt^2} + a_1 \frac{dx_f}{dt} + a_0 x_f = f(t)$$

Hay diversos métodos para obtener x_f , pero para nuestros propósitos, utilizaremos el procedimiento de adivinar una solución de forma tentativa.

En el caso de tenerse funciones forzadas constantes, podemos obtener la solución forzada directamente del diagrama de circuito. En el estado estable dc todas las corrientes y voltajes serán constantes, incluyendo la incógnita en la ecuación descriptiva. La solución forzada constante debe ser idéntica al valor de estado estable dc. Recuérdese que esto puede obtenerse reemplazando inductores por circuitos cerrados y capacitores por circuitos abiertos.

Se adjunta una tabla con soluciones forzadas tentativas para funciones forzadas comunes. (*Ver en libro lo de forma t-multiplicada*).

Cuando la solución forzada tentativa coincide en un término con la solución natural, es necesario t-multiplicar la solución forzada tentativa. Si aún siguen coincidiendo, t-multiplíquese nuevamente, y así de manera sucesiva, hasta que no coincidan.

7.5 Respuesta total

La respuesta total de un circuito es la suma de sus respuestas natural y forzada.

Es necesario conocer los estados iniciales de los elementos del circuito para poder completar su resolución. (*Ver ejemplo en el libro, pág. 252*).

7.6 Respuesta de escalón unitario

Se estudian tres tipos de respuesta de escalón, subamortiguado, sobreamortiguado y críticamente amortiguado. Observamos que el circuito críticamente amortiguado demuestra la convergencia mas rápida al estado estable de 1V. La transitoria en el caso sobreamortiguado contiene dos términos, uno de los cuales tiene una mayor constante de tiempo y por consiguiente decae a cero mas lentamente que el caso críticamente amortiguado. La transitoria en la respuesta subamortiguada es oscilatoria, y la amplitud de estas oscilaciones decae a cero con una constante de tiempo τ aun mayor. Por consiguiente, aunque la respuesta subamortiguada primero llega al valor de 1V con mas rapidez que las otras respuestas, “rebasa” este valor y su verdadera convergencia al estado estable es aun mas lenta que el caso sobreamortiguado. (*Ver ejemplo y gráficos en libro, pág. 259*).

Fuentes sinusoidales y fasores

8.1 Propiedades de los sinusoides

$$v(t) = V_m \sin \omega t + \varphi$$

Donde V_m es la amplitud, ω es la frecuencia angular y φ el ángulo de fase.

Supongamos $v_1 = V_m \sin \omega t$ y $v_2 = V_m \sin \omega t + \varphi$, en la gráfica de ambos v_2 esta desplazada en $\frac{\varphi}{\omega}$ segundos o φ radianes a la izquierda respecto de v_1 . Según esto podemos decir que v_2 se adelanta a v_1 por φ radianes.

No importa usar senos o cosenos debido a que un coseno tiene su equivalente expresión escrita en forma de seno y viceversa.

$$\cos \omega t - \frac{\pi}{2} = \sin \omega t$$

$$\sin \omega t + \frac{\pi}{2} = \cos \omega t$$

La diferencia entre senos y cosenos es el ángulo de fase.

8.2 Ejemplo de circuito RLC

El método clásico utilizado para resolver un circuito RLC es algo laborioso para un simple circuito de una sola trayectoria cerrada.

Se desarrollara un enfoque que ofrece una considerable ventaja para estos cálculos, evitando la necesidad de resolver dos ecuaciones simultáneas para los coeficientes de cuadratura A y B, y que nos permite tratar los circuitos RLC del mismo modo en que tratamos los circuitos puramente resistivos. El método clásico siempre quedara disponible pero para problemas complejos se preferirá el método de los fasores.

8.3 Fuentes complejas

Un método alternativo para tratar circuitos con fuentes sinusoidales, involucra reemplazar las fuentes dadas por fuentes complejas, cuyas funciones de fuente tienen partes reales e imaginarias.

Las corrientes y voltajes en circuitos excitados por fuentes complejas tendrán a su vez valores complejos.

Números polares:

$A = a + jb$	$A = A \angle \alpha$
$ A = \sqrt{(a^2 + b^2)}$	$\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a}$
$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$	$e^{j\theta} = 1 \angle \theta$

La forma polar exponencial: $A = |A|e^{j\alpha}$.

Dada una fuente compleja $V_m e^{j(\omega t + \varphi)}$,

$$\text{Re}[V_m e^{j(\omega t + \varphi)}] = V_m \cos \omega t + \varphi \text{ y } \text{Im}[V_m e^{j(\omega t + \varphi)}] = V_m \sin \omega t + \varphi.$$

Podemos afirmar que la respuesta a la parte real de una fuente compleja es la parte real de la respuesta. Así también, la respuesta a la parte imaginaria de una fuente compleja es la parte imaginaria de la respuesta.

Dado un circuito excitado por una senoide, la respuesta forzada puede obtenerse reemplazando el senoide por una exponencial compleja, cuya parte real es el senoide dado. La ecuación descriptiva será más fácil de resolver, puesto que la solución forzada tentativa tendrá una sola constante indeterminada, en lugar de dos que requiere la solución de ecuaciones simultaneas para los coeficientes. Una vez resuelta, podemos fácilmente relacionar la respuesta de excitación compleja con nuestra respuesta sinusoidal deseada, tomando la parte real de la respuesta, si la fuente sinusoidal original es la parte real de la fuente exponencial compleja, o la parte imaginaria, si es la parte imaginaria de la fuente compleja.

8.4 Fasores

Nuestro interés es la respuesta forzada de un circuito a una excitación sinusoidal en la frecuencia ω , utilizaremos los fasores para encontrar esta respuesta.

Cada fuente sinusoidal puede ser expresada como un coseno

$$V_g(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Supóngase que sustituimos cada fuente por una fuente exponencial compleja dada por

$$V_{g1}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Puesto que esta excitada por fuentes exponenciales complejas de frecuencia ω , todas las corrientes y voltajes también serán exponenciales complejas de frecuencia ω . Esto surge de la forma de la solución forzada tentativa $Ae^{j\omega t}$. Entonces, cada corriente será de la forma

$$i_1(t) = \mathbf{I} e^{j\omega t}$$

Y cada voltaje será de la forma

$$v_1(t) = \mathbf{V} e^{j\omega t}$$

Definiremos $\mathbf{I}$ y $\mathbf{V}$ como fasores, es decir, los números complejos que multiplican $e^{j\omega t}$ en las expresiones para corrientes y voltajes.

Sea una respuesta $v(t)$. Luego de sustituir las fuentes exponenciales complejas, la misma variable de respuesta será $v_1(t) = \mathbf{V} e^{j\omega t}$, donde $\mathbf{V} = |\mathbf{V}| \angle \theta$ es su fador de voltaje.

La respuesta a la parte real de una fuente es la parte real de la respuesta. Entonces la respuesta sinusoidal $v(t)$ es la parte real de la respuesta compleja $v_1(t)$, o

$$v(t) = \text{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t})$$

Utilizando la forma exponencial polar para $\mathbf{V}$, y tomando la parte real,

$$v(t) = \text{Re}(|\mathbf{V}| e^{j\theta} e^{j\omega t}) = |\mathbf{V}| \cos(\omega t + \theta)$$

La amplitud del senoide es la amplitud de su fador, y el ángulo de fase del senoide es el ángulo de su fador. De este modo podemos describir inmediatamente en la corriente o voltaje sinusoidal, una vez calculado su fador.

8.4 Leyes I-V para fasores

El voltaje del fador es proporcional a la corriente del fador, como en la Ley de Ohm.

$$\mathbf{V} e^{j\omega t} = R \mathbf{I} e^{j\omega t}$$

O, cancelando los factores $e^{j\omega t}$

$$\mathbf{V} = R \mathbf{I}$$

La magnitud del fador de voltaje es igual a la magnitud del fador de corriente multiplicado por R , y los ángulos son los mismos. La corriente y voltaje están en fase.

En el caso del inductor,

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}$$

Si la corriente del inductor está dada por $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_1)$, entonces el voltaje de fasor es

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (j\omega L)(I_m \angle \varphi_1) \\ &= \omega L I_m \angle \varphi_1 + 90^\circ\end{aligned}$$

Puesto que $j = 1 \angle 90^\circ$. Por consiguiente, en el dominio de tiempo tenemos

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi_1 + 90^\circ)$$

Podemos ver que en el caso de un inductor, la corriente está retardada en 90° respecto al voltaje.

Consideremos el capacitor

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

En el caso de un capacitor, la corriente y voltaje están fuera de fase, donde la corriente se adelanta al voltaje 90° .

8.6 Impedancia y Admitancia

Definimos la proporción de voltaje de fasor contra la corriente de fasor como la impedancia del circuito que denotamos por Z . Es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= Z \mathbf{I} \\ |Z| &= \frac{V_m}{I_m}, \quad \varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I\end{aligned}$$

La impedancia juega el papel desempeñado por la resistencia en los circuitos resistivos. Al igual que la resistencia, la impedancia se mide en ohms.

Es importante enfatizar que la impedancia es un número complejo, siendo la proporción de dos números complejos, pero no es un fasor. La **impedancia** es una **constante compleja** que multiplica un fasor para producir otro.

Para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus ángulos. En la división se dividen sus módulos y se restan sus ángulos.

La impedancia Z está escrita en su forma rectangular como

$$Z = R + jX$$

$R = \text{Re}(Z)$ es la componente resistiva, o simplemente resistencia, y $X = \text{Im}(Z)$ es el componente reactivo, o reactancia. En general, $Z = Z(j\omega)$ es una función compleja de $j\omega$, pero $R = R(\omega)$ y $X = X(\omega)$ son funciones reales de ω . Tanto R como X , al igual que Z , están medidos en ohms.

$$\begin{aligned}Z_R &= R \\ Z_L &= j\omega L = \omega L \angle 90^\circ \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ\end{aligned}$$

En el caso de una resistencia, la impedancia es puramente resistiva, y su reactancia es cero. Las impedancias de inductores y capacitores son puramente reactivas, teniendo componentes resistivos cero.

La reactancia inductiva está denotada por

$$X_L = \omega L$$

De forma que

$$Z_L = jX_L$$

y la reactancia capacitiva esta denotada por

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

Y de este modo

$$Z_C = jX_C$$

El reciproco de la impedancia denotado por

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Se conoce como admitancia y es análoga a la conductancia (el reciproco de la resistencia) en circuitos resistivos. Evidentemente, puesto que Z es un numero complejo, también lo es Y . La representación convencional es

$$Y = G + jB$$

Las magnitudes $G = Re(Y)$ y $B = Im(Y)$ se conocen respectivamente como conductancia y susceptancia. Las unidades de Y , G y B están todas en siemens.

8.7 Leyes de Kirchhoff y equivalentes de impedancia

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_N = 0$$

donde $\mathbf{V}_n = V_n \angle \theta_n$ $n = 1, 2, \dots, N$ son los voltajes de fasor alrededor de la trayectoria cerrada. Por consiguiente, LKV es vigente para los fasores.

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \dots + \mathbf{I}_N = 0$$

donde $\mathbf{I}_n = I_n \angle \theta_n$ $n = 1, 2, \dots, N$ por consiguiente, LCK rige para los fasores.

En circuitos con excitaciones sinusoidales con una frecuencia común ω , si nos interesamos únicamente en la respuesta forzada, o de estado estable ac, podemos obtener las corrientes o voltajes de fasor de todo elemento y utilizar las leyes de Kirchhoff para completar el análisis. Por consiguiente, el análisis es idéntico al análisis de circuitos resistivos, donde las **impedancias reemplazan a las resistencias**, y los **fasores reemplazan a las corrientes y voltajes** de dominio de tiempo. Una vez obtenidos los fasores, podemos convertirlos inmediatamente a las respuestas sinusoidales de dominio de tiempo de la forma acostumbrada.

N impedancias conectadas en serie, por LKV alrededor del circuito,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_N &= (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N)\mathbf{I} \\ \mathbf{V} &= Z_{eq}\mathbf{I}\end{aligned}$$

Donde Z_{eq} es la impedancia equivalente que se mide en las terminales, esto implica que

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$$

como en el caso de las resistencias en serie.

Similarmente, la admitancia equivalente Y_{eq} es

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$$

De forma similar, las reglas de división de voltaje y corriente rigen para los circuitos de fasor, con impedancias y magnitudes de dominio de frecuencia, exactamente del mismo modo que rigen para circuitos resistivos, con resistencias y magnitudes de dominio de tiempo.

Esta capacidad de tratar inductores, capacitores y resistencias como elementos del tipo genérico impedancia, sin distinguir entre ellos al escribir ecuaciones de circuitos, es una de las principales fortalezas del método de fasores. Se pueden simplificar circuitos RLC utilizando equivalentes series-paralelo, divisores corriente-voltaje, y transformaciones de Thevenin-Norton, del mismo modo en que se trataron los circuitos puramente resistivos. Las impedancias en serie suman, las corrientes a través de las impedancias en paralelo dividen en proporción a sus admitancias, y así sucesivamente, sin importar las identidades específicas (R, L o C) de las impedancias involucradas.

8.8 Circuitos con fasores

Basta simplemente comenzar con el circuito de fasores, que definiremos como el circuito en el dominio de tiempo con voltajes y corrientes sustituidas por sus fasores y los elementos identificados por sus impedancias.

En el caso de un amp op, el circuito de fasores es igual al circuito de dominio de tiempo. Es decir, un amp op ideal en el circuito de dominio de tiempo aparece como un amp op ideal en el circuito de fasores porque las ecuaciones de dominio de tiempo $i = 0$, $v = 0$ que caracterizan la corriente hacia, y el voltaje a través, de las terminales de entrada retienen la firma idéntica, $\mathbf{I} = 0$, $\mathbf{V} = 0$ en las ecuaciones de fasores.

La primera precaución es que los fasores son útiles para obtener únicamente las respuestas forzadas. Si se desea la respuesta natural debe utilizarse otra herramienta.

La segunda precaución se refiere al uso de fasores para determinar respuestas en estado estable. Para muchos circuitos, ocurre que las respuestas naturales decaen a cero cuando $t \rightarrow \infty$. En estos circuitos, la respuesta forzada y las respuestas de estado estable son sinónimas, y los fasores (diseñados para determinar la respuesta forzada) pueden utilizarse para obtener la respuesta en estado estable. Tales circuitos se conocen como estables. Para los circuitos restantes o inestables, en general, la respuesta natural no decae a cero, y por consiguiente, la respuesta en estado estable no puede ser identificada con la respuesta forzada. Entre ejemplos de circuitos estables, se incluyen todos los circuitos que están hechos exclusivamente de elementos pasivos y fuentes independientes y que no tienen respuestas naturales no amortiguadas. Entre los ejemplos de circuitos inestables se cuentan aquellos con respuesta natural no amortiguada, y circuitos que poseen una respuesta natural que crece, en lugar de decaer, respecto al tiempo. Las respuestas naturales crecientes, son posibles únicamente en circuitos lineales que contienen funciones controladas.

En general, los circuitos inestables no poseen ninguna clase de respuesta en estado estable.

Análisis en estado estable de AC

9.1 Simplificaciones de circuitos

En el estado estable ac, podemos reemplazar el circuito original por su contraparte de circuito de fasores, en donde las fuentes sinusoidales quedan representadas por sus fuentes de fasores correspondientes y elementos RLC por sus impedancias Z .

Puesto que las leyes sobre las que se fundamenta son igualmente válidas para circuitos de fasores, podríamos anticipar que también serán vigentes para los circuitos de fasores las mismas simplificaciones de circuitos derivadas para circuitos resistivos. De este modo, puede utilizarse toda la potencia de estos métodos para el análisis de circuitos en estado estable ac, en donde la única modificación será la sustitución de la resistencia R por la impedancia Z , y el subsiguiente uso de la aritmética compleja en vez de la real.

Las impedancias en serie se suman.

Las admitancias en paralelo también se suman.

Si tenemos n impedancias en serie, para cada impedancia su voltaje es $V_i = Z_i I$

$$V_i = \frac{Z_i}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n} V$$

Comparando las caídas de voltaje a través de dos impedancias Z_i y Z_j , $\frac{V_i}{V_j} = \frac{Z_i}{Z_j}$

El voltaje a través de impedancias en serie divide en proporción directa a sus impedancias.

Puesto que las admitancias en paralelo se suman a partir de $I = YV$ tenemos $I_i = Y_i V$ o

$$I_i = \frac{Y_i}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} I$$

Comparando dos de estas corrientes paralelas Z_i y Z_j , $\frac{I_i}{I_j} = \frac{Y_i}{Y_j}$

La corriente que pasa a través de impedancias en paralelo divide en proporción directa a sus admitancias.

Las fuentes de voltaje en serie se suman, las fuentes de corriente en paralelo se suman.

Los equivalentes de Thevenin y Norton en los circuitos de fasores son exactamente los mismos que se describieron para circuitos resistivos, donde la única diferencia es la sustitución de la resistencia R por la impedancia Z , y el subsiguiente uso de la aritmética de números complejos.

$$Z_T = Z_N$$
$$V_T = Z_N I_N$$

9.2 Análisis nodal

Para nuestros circuitos de fasores podemos realizar el análisis nodal de la misma manera que lo hacíamos para circuitos con elementos R , L o C , a diferencia de que ahora solo utilizamos la impedancia Z .

Al reducir leyes de elementos para elementos de almacenamiento que involucran integrales y derivadas, a la ecuación $V = ZI$, que es más simple, reemplazamos el cálculo por el álgebra. Las subsiguientes ecuaciones nodales o de malla pueden ser siempre formuladas por una sola

ecuación de vectores y matrices, y se resuelven por los métodos del álgebra lineal, en lugar de los métodos, más complicados que requieren las ecuaciones diferenciales.

9.3 Análisis de malla

Análogo a lo explicado en la sección anterior.

9.4 Fuentes con frecuencias diferentes

Como recordaremos, un circuito ac es todo aquel cuyas fuentes independientes son todas sinusoidales. Si todas las fuentes en un circuito ac son de la misma frecuencia ω , puede utilizarse el circuito fasorial correspondiente para determinar la respuesta forzada en la forma descrita en las últimas tres secciones. Puede calcularse mediante un solo análisis unificado nodal o de malla, o mediante superposición.

La superposición es un principio general que siempre se utilizara para obtener la respuesta de un circuito lineal que contengan más de una fuente. Aun si un circuito ac contiene fuentes con frecuencias diferentes, puede utilizarse la superposición para obtener la respuesta forzada. Para propósitos de superposición, las fuentes se agrupan de forma que cada problema de componentes contenga únicamente fuentes de una sola frecuencia. Entonces, para cada problema de componentes resultante, puede utilizarse un circuito fasorial para determinar la respuesta de fasor, que es luego convertida a una respuesta sinusoidal y sumada a las otras respuestas de componentes, tal y como lo requiere el principio de superposición.

No pueden superponerse fasores correspondientes a distintas frecuencias; únicamente pueden superponerse sus sinusoides correspondientes. Recuérdese que un fasor dado corresponde a la información de amplitud y fase de una senoide de una frecuencia específica ω . Si difieren las frecuencias de los dos fasores, no tiene sentido sumarlos entre sí.

Cuando las frecuencias difieren, el principio de superposición se aplica a la suma de las componentes en el dominio del tiempo y no a fasores.

La superposición puede utilizarse para descomponer problemas del estado estable ac que involucren fuentes independientes con más de una frecuencia, en problemas de componentes, donde cada una contiene fuentes de la misma frecuencia. Los problemas de componentes pueden ser entonces resueltos con la ayuda de fasores.

Para fuentes con frecuencias diferentes, la superposición no es solo una elección; es la única alternativa para determinar la respuesta en estado estable ac.

9.5 Diagramas fasoriales

Puesto que los fasores son números complejos, pueden representarse por vectores en un plano, donde las operaciones, como la adición de fasores, pueden realizarse geométricamente. Este dibujo se conoce como diagrama de fasores, y puede ser muy útil para analizar circuitos en estado estable ac.

Potencia en estado estable de AC – Apunte adicional “Potencia y trabajo de la corriente alterna”

Un circuito de corriente eléctrica consta, en su caso más sencillo, de una fuente de energía eléctrica (batería, generador) y de una carga de energía eléctrica (ej. motor). La fuente proporciona energía eléctrica y la carga la transforma en otro tipo de energía, por ej. una estufa eléctrica la transforma en calor, un motor en energía mecánica.

Siempre que la fuente proporcione una determinada cantidad de energía por unidad de tiempo (potencia eléctrica), la tensión de fuente V_f empuja una corriente I a través del circuito. La potencia eléctrica transformada por una carga, como en el caso de un circuito de corriente continua, se denomina “**potencia eléctrica activa**” y se designa con la letra P .

$$P = V_f \cdot I \quad [W]$$

Un circuito de corriente eléctrica contiene siempre resistencias óhmicas. La potencia eléctrica se transforma en potencia calorífica en estos tipos de resistencias. En el caso de un circuito con un motor como carga, solo una parte de la potencia eléctrica de la fuente es transformada en potencia mecánica, el resto se pierde en forma de potencia calorífica.

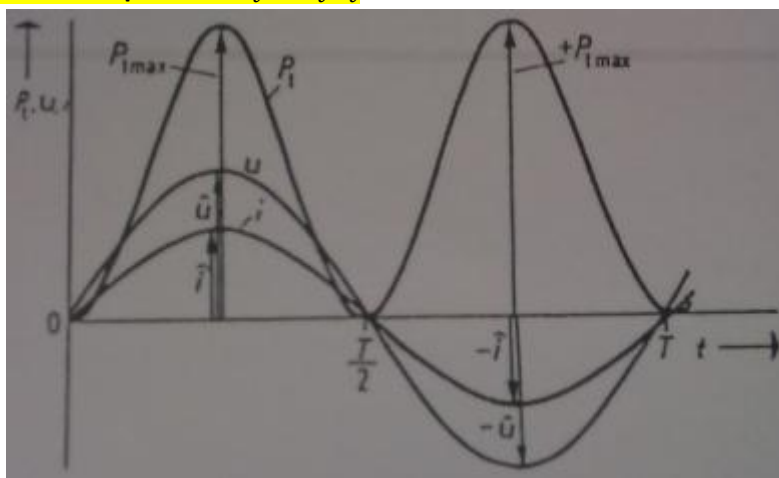
El **trabajo eléctrico** es lo que recibe una carga al proporcionarle una potencia constante P durante un tiempo t . Se designa con la letra W .

$$W = P \cdot t \quad [Ws \text{ ó } J]$$

El trabajo eléctrico es la magnitud que la empresa suministradora de corriente mide mediante un contador en el lugar de entrega al consumidor y se lo cobra.

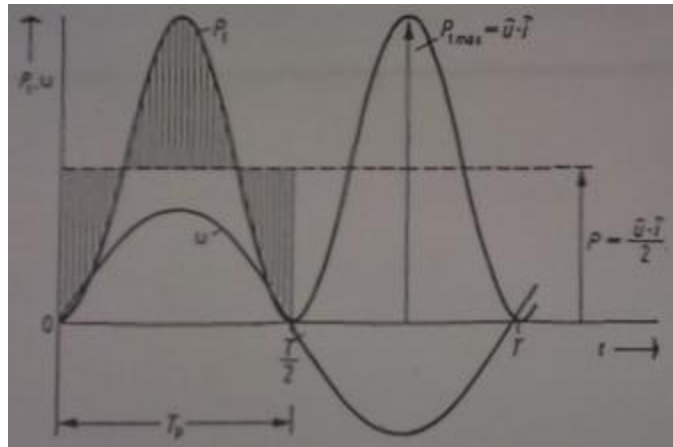
Si el circuito de corriente alterna contiene únicamente una resistencia óhmica, entonces la corriente y la tensión se encuentran en fase.

El **valor instantáneo de la potencia** $P_t = v_t \cdot i_t$



Entonces en un circuito de corriente continua la potencia recibida por una resistencia óhmica es constante, en cambio en un circuito de corriente alterna varía periódicamente tomando valores desde cero hasta $P_{t \max}$.

La potencia varía de una forma senoidal, y oscila entre la recta trazada paralela al eje temporal con una frecuencia doble a la tensión v .



Como la potencia de corriente alterna varía constantemente su valor instantáneo P_t , se da como magnitud de la **potencia** un **valor medio** P . Este valor medio P corresponde a la distancia entre la paralela trazada y el eje temporal, y con ello, a la mitad del valor máximo de la potencia $P_{t\max}$.

$$P = \frac{P_{t\max}}{2} = \frac{i_{\max} \cdot v_{\max}}{2}$$

En un circuito de corriente alterna con una resistencia óhmica como carga, la potencia activa es igual a la mitad del producto de los valores de cresta de corriente y tensión.

El valor de la **potencia activa** en un circuito óhmico de **corriente alterna** se obtiene como valor medio de la oscilación de la potencia a lo largo de un periodo.

El **valor eficaz** de una corriente alterna se define como el valor de una corriente continua, que al circular por una determinada resistencia óhmica pura produce los mismos efectos caloríficos que dicha corriente alterna.

En la técnica de corriente alterna se dan los valores de corriente y tensión como valores eficaces, por lo tanto debería poder calcular también la potencia a partir de estos valores.

$$P = \frac{v_{\max} \cdot i_{\max}}{2} = \frac{v_{\max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Luego $V = \frac{v_{\max}}{\sqrt{2}}$ es el valor eficaz de la tensión alterna.

Y $I = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$ es el valor eficaz de la corriente alterna.

Como esta corriente se encuentra en fase con la tensión, se le denomina de una manera más precisa **corriente activa** I_a . La potencia activa es la energía eléctrica que es transformada en otro tipo de energía por unidad de tiempo.

En un circuito de corriente alterna, el trabajo eléctrico W recibido por una carga en un determinado tiempo t corresponde a la suma de la superficie del rectángulo a lo largo del tiempo t con amplitud P (Potencia dada por los valores eficaces, multiplicada por el tiempo).

Como el trabajo eléctrico W se transforma totalmente en la carga en otro tipo de energía, se le denomina también **trabajo activo**. $W = P \cdot t$

En un circuito de corriente continua la carga recibe el trabajo eléctrico de forma continua, en cambio en uno de corriente alterna la carga recibe el trabajo eléctrico en distintos bloques de trabajo.

La **impedancia** está compuesta por una parte real, la resistencia, y una parte imaginaria, la **reactancia**.

En el caso de una resistencia, la impedancia es puramente resistiva, y su reactancia es cero. Las impedancias de inductores y capacitores son puramente reactivas, teniendo componentes resistivos cero.

Un circuito de corriente alterna puede contener también una reactancia además de una resistencia óhmica (una resistencia activa). Ella puede ser reactancia inductiva o bien reactancia capacitiva. En un circuito de corriente alterna de este tipo, tensión y corriente se encuentran desplazadas 90° .

En el caso de un capacitor la corriente i se adelanta con respecto a la tensión en 90° .

La potencia recibida por un capacitor en un circuito de corriente alterna oscila senoidalmente con una frecuencia doble a la de la tensión alterna de una manera simétrica al eje temporal, es decir al eje x .

La **potencia alterna** recibida por una resistencia **óhmica** varía periódicamente desde el cero y un valor máximo positivo.

La **potencia alterna** recibida por una resistencia **capacitiva** varía periódicamente desde un valor máximo positivo y otro negativo de igual magnitud.

La **potencia activa** P como valor medio de los valores instantáneos P_t es **cero** en un circuito de corriente alterna con un capacitor. El **capacitor no recibe** potencia activa.

Esta consideración se cumple solo en el caso teórico de un circuito de corriente alterna sin ninguna pérdida, en la práctica siempre hay una cantidad aunque sea pequeña de resistencias óhmicas por las que es recibida cierta potencia activa.

En el caso de un **inductor** la corriente i se **retrasa** con respecto a la tensión en 90° y 180° respecto de la corriente reactiva capacitiva.

Su potencia alterna recibida tiene el mismo comportamiento que en un capacitor, solo que retrasada 180° (signo opuesto).

Si un circuito de corriente alterna contiene una reactancia X como única carga, entonces la potencia activa P es cero, independientemente de que la fuente deje fluir en el circuito una corriente reactiva I_r con una tensión alterna V según $I_r = V/X$.

Al hacer $I_r \cdot V$ obtenemos una potencia que tiene que ser alcanzada por la fuente, peor que no da **ninguna transformación** de energía en la carga.

El producto del valor eficaz de la tensión V y del valor eficaz de la corriente reactiva I_r , desplazada en 90° se denomina **potencia reactiva** del circuito de corriente alterna y se designa **Q** .

La potencia reactiva es una magnitud importante porque tiene que ser tomada en cuenta a la hora de efectuar un cálculo sobre la fuente. La fuente tiene que estar capacitada para proporcionar una corriente reactiva I_r dada una tensión V , si se requiere una potencia reactiva $Q = V \cdot I_r$ por parte del consumidor.

La potencia reactiva que tiene que ser proveída por la fuente es, pues, la diferencia entre la potencia reactiva inductiva y la potencia reactiva capacitiva de las dos cargas.

Si se suman distintas potencias reactivas en un circuito de corriente alterna para obtener la potencia reactiva requerida de la fuente, entonces se toman potencias reactivas **inductivas** como **positivas**, y potencias reactivas **capacitivas** como **negativas**.

En un circuito de corriente alterna, capacitores e inductores reciben y entregan energía constantemente.

Cargas técnicas son raramente puras resistencias activas o puras reactancias. Estas actúan generalmente como una composición de ambos, sobre todo de **una resistencia activa y de una reactancia inductiva**. Esto se cumple para toda carga que necesite de un **campo magnético** para su función, por ej. motores, transformadores, bobinas de reactancia o electroimanes.

Una carga óhmica inductiva de este tipo ocasiona que la corriente I se atrase con un ángulo de desplazamiento de fase φ con respecto de la tensión V .

La mayoría de las cargas técnicas en un circuito de corriente alterna actúan como una composición de una resistencia activa y de una reactancia, especialmente una reactancia inductiva.

Una carga óhmica-inductiva toma de una tensión alterna V una corriente alterna I que se retrasa en un ángulo φ con respecto a la tensión. Esta corriente puede ser dividida en una corriente activa $I_a = I \cos \varphi$, y en una corriente reactiva $I_r = I \sin \varphi$.

Potencia activa: $P = V \cdot I_a = VI \cos \varphi$

Potencia reactiva: $P = V \cdot I_r = VI \sin \varphi$

La tensión V y la corriente I también pueden ser medidas en el circuito. Si se multiplican estos dos valores, entonces se obtiene una potencia que es recibida aparentemente por la carga, se la denomina potencia aparente y se designa con la letra S .

La potencia aparente eléctrica contiene potencia activa y potencia reactiva, los valores de cada una dependen del ángulo φ .

- $\varphi = 0$ La potencia aparente S es igual a la potencia activa P .
- $0 < \varphi < 90^\circ$ La potencia aparente S contiene potencia activa y reactiva.
- $\varphi = 90^\circ$ La potencia aparente S es igual a la potencia reactiva Q .

La potencia aparente puede ser representada en un triángulo rectángulo con ángulo de desplazamiento de fase φ . Según este triángulo se obtiene la parte involucrada en la potencia aparente S de potencia activa P y la de potencia reactiva Q como

$$P = S \cdot \cos \varphi \quad Q = S \cdot \sin \varphi$$

Es necesario diferenciar la potencia reactiva capacitiva de la inductiva en caso de que ambas formen parte de un mismo circuito de corriente alterna. Esto se hace poniéndole un signo negativo a la potencia reactiva capacitiva.

La función de una carga técnica consiste en transformar un determinado trabajo eléctrico en otra forma de energía. Para ello requiere una determinada potencia activa $P = S \cdot \cos \varphi$. El $\cos \varphi$

determina que parte de la potencia aparente necesita la carga para su función. Por ello se denomina al $\cos \varphi$ como **factor activo** o **factor de potencia**.

Si la carga también requiere potencia reactiva para su función, por ej. para crear un campo magnético, entonces el $\sin \varphi$ representa la parte de la potencia reactiva involucrada en la potencia aparente. Por ello al $\sin \varphi$ también se le denomina **factor reactivo**.

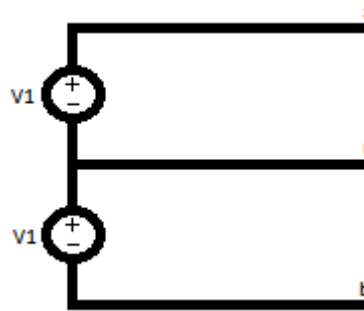
Circuitos trifásicos

11.1 Sistemas monofásicos de tres hilos

Una fuente monofásica de tres hilos, es aquella que tiene tres terminales de salida a, b, y una terminal neutra n para la cual son iguales los voltajes V_{an} de las terminales, es decir:

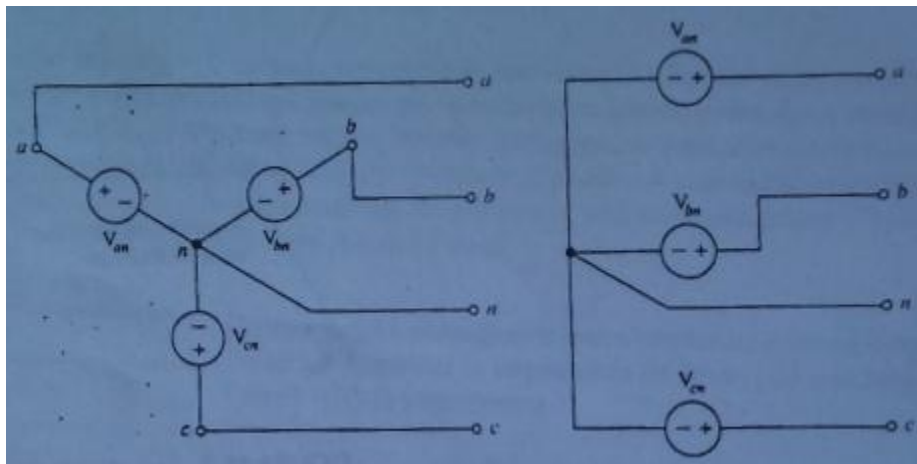
$$V_{an} = V_{bn} = V_1$$

Esta es una disposición que tiene tanto 115V como 230V rms, puesto que si $|V_{an}| = |V_1| = 115V$ rms, entonces $|V_{ab}| = |2V_1| = 230V$ rms.



11.2 Sistemas trifásicos Y-Y

La siguiente es una fuente Y conectada



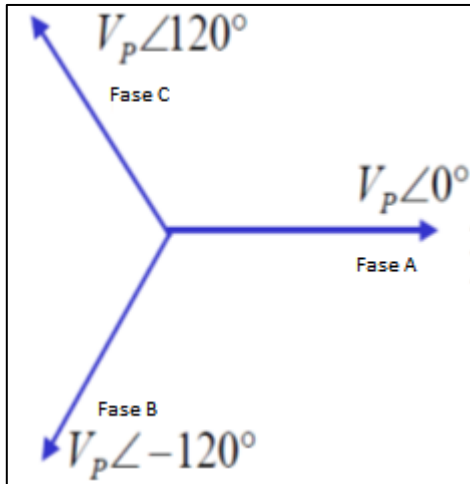
Los voltajes V_{an} , V_{bn} y V_{cn} se conocen como voltajes de fase, y consideramos que están dadas por

$$V_{an} = V_p \angle 0$$

$$V_{bn} = V_p \angle -120$$

$$V_{cn} = V_p \angle 120$$

Cada voltaje de fase tiene la misma magnitud rms V_p y las fases están desplazadas en 120° , con V_{an} arbitrariamente seleccionado como fasor de referencia.



Este conjunto de voltajes se conoce como conjunto balanceado y está caracterizado por:

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

Escribiremos al resto en función de V_{an} :

$$V_{bn} = V_{an} \angle -120^\circ$$

$$V_{cn} = V_{an} \angle 120^\circ$$

A partir de los voltajes de fase podemos obtener los voltajes de línea V_{ab} , V_{bc} y V_{ca} .

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ$$

$$V_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}V_p \angle -210^\circ$$

Sea V_L la magnitud de los voltajes de línea, entonces tenemos

$$V_L = \sqrt{3}V_p$$

Y por consiguiente:

$$V_{ab} = V_L \angle 30^\circ$$

$$V_{bc} = V_L \angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = V_L \angle -210^\circ$$

Para un sistema de cuatro hilos, trifásico y Y-Y balanceado concluimos en que:

- El **voltaje de línea** es **mayor** al **voltaje de fase** por un factor $\sqrt{3}$.
- El voltaje de línea **adelanta** al voltaje de fase en 30° .
- La corriente de línea y la corriente de fase son iguales.

La potencia promedio P_p suministrada a cada fase en un sistema de estos es

$$P_p = V_p I_p \cos \theta = I_p^2 \operatorname{Re}(Z_p)$$

La potencia total suministrada a la carga es $P = 3P_p$. El ángulo θ de la impedancia de fase es el ángulo del factor de potencia de la carga trifásica, así como de la fase única.

11.3 Transmisión de potencia monofásica contra trifásica

Consideremos las pérdidas de línea incurridas por cada sistema en tanto produce la misma cantidad de potencia al mismo nivel de voltaje y factor de potencia.

Z_L impedancia de línea, Z_n impedancia de carga.

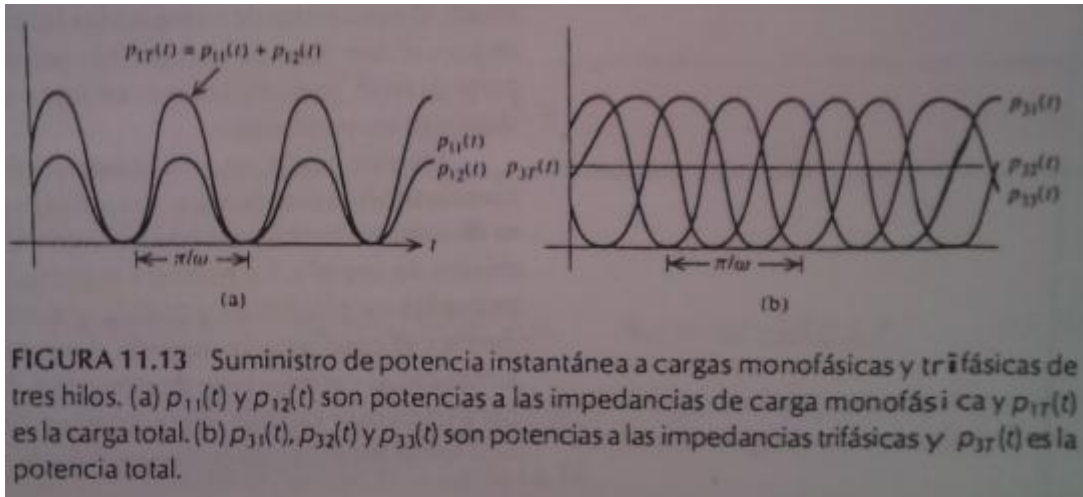
En el caso monofásico: $P_{aN} + P_{bN} = 2P_{aN} = \frac{2V^2 \cos \theta}{|Z_1 + Z_L|}$

En el caso trifásico: $P_{a'N'} + P_{b'N'} + P_{c'N'} = 3P_{a'N'} = \frac{3V^2 \cos \theta}{|Z_3 + Z_L|}$

Las potencias transmitidas por las fuentes monofásica y trifásica son iguales si las ecuaciones anteriores son iguales, o si

$$\frac{|Z_3 + Z_L|}{|Z_1 + Z_L|} = \frac{3}{2}$$

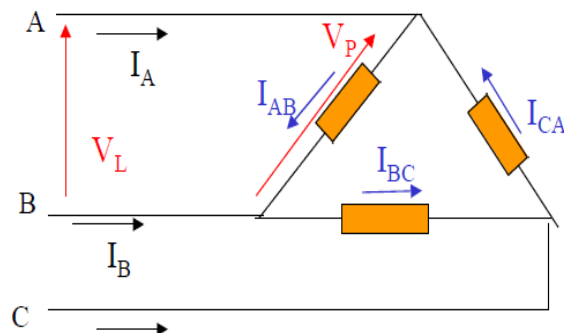
Para un suministro igual de potencia, las impedancias de fase en serie en el circuito trifásico, $Z_3 + Z_L$, es $\frac{1}{2}$ veces mayor que la impedancia de fase única. Puesto que los voltajes son los mismos, la corriente rms en las líneas de fase única debe ser mayor en la misma proporción. Sabemos que a más impedancia menor corriente, y menor corriente implica menos potencia. Calculando las pérdidas concluimos en que $P_{Lm} = \frac{3}{2} P_{Lt}$, por lo tanto en el sistema monofásico hay más pérdidas que en el trifásico, lo que nos permite asegurar que el suministro de potencia trifásico es más eficiente.



A partir del grafico anterior podemos observar que la potencia trifásica instantánea total suministrada a la carga es constante. Concluimos que la potencia monofásica se suministra inestablemente, variando periódicamente entre cero y su máximo, en tanto que la potencia trifásica es constante respecto al tiempo.

No solo la transmisión de potencia trifásica tiene una ventaja de eficiencia sobre la fase única, sino también una ventaja de transmisión estable de potencia. La potencia monofásica es el método elegido únicamente cuando hay pequeñas cantidades de potencia, y donde son suficientes los motores de poca potencia.

11.4 Conexión delta (triángulo)

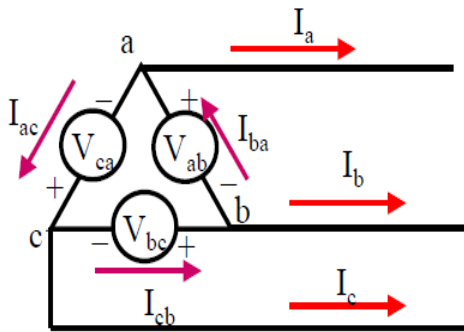


Los voltajes de línea y los voltajes de fase son iguales, $V_L = V_p$.

$$V_{ab} = V_L \angle 30^\circ$$

$$V_{bc} = V_L \angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = V_L \angle 150^\circ$$



$$\text{Si } Z_P = |Z_P| \angle \theta$$

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_P} = I_P \angle 30^\circ - \theta$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_P} = I_P \angle -90^\circ - \theta$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_P} = I_P \angle 150^\circ - \theta$$

Entonces:

$$I_a = \sqrt{3} I_P \angle -\theta$$

$$I_b = \sqrt{3} I_P \angle -120^\circ - \theta$$

$$I_c = \sqrt{3} I_P \angle -240^\circ - \theta$$

$$\text{Luego } I_L = \sqrt{3} I_P$$

Conclusiones:

- Las corrientes de línea son $\sqrt{3}$ **mayores** que las corrientes de fase.
- Las corrientes de línea se **retrasan** a la corriente de fase en 30° .
- Los voltajes de línea son **iguales** a los voltajes de fase.

Transformada de Laplace

12.5 Solución de ecuaciones integrodiferenciales

Las transformadas de Laplace pueden utilizarse para resolver ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales, tales como las ecuaciones del análisis básico de circuitos eléctricos. La ecuación o ecuaciones son primero Laplace transformadas, y luego resueltas por medios algebraicos directos. La transformada inversa de la solución queda identificada como la expansión en fracciones parciales.

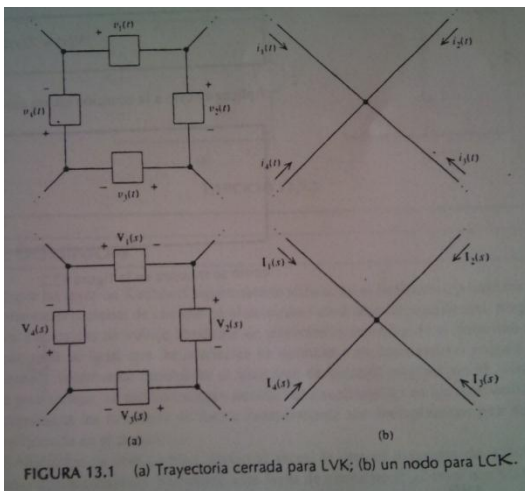
El enfoque del dominio-s para la solución de las diferenciales o integrodiferenciales, tiene claras ventajas sobre las técnicas clásicas de ecuaciones diferenciales.

El precio que se paga por esas ventajas, es que las ecuaciones primero deben transformarse, y luego, al final deben regresarse sus soluciones del dominio-s al dominio del tiempo (transformada inversa).

Análisis de circuitos en el dominio-s

13.1 Elementos y leyes de Kirchhoff

Demostraremos que todas las leyes esenciales de circuitos pueden pasar del dominio del tiempo al dominio s.



Considérese la malla y el nodo de la figura:

$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) = 0$$

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$$

Transformando las ecuaciones al dominio S:

$$\mathbf{V}_1(s) + \mathbf{V}_2(s) + \mathbf{V}_3(s) + \mathbf{V}_4(s) = 0$$

$$\mathbf{I}_1(s) + \mathbf{I}_2(s) + \mathbf{I}_3(s) + \mathbf{I}_4(s) = 0$$

Las caídas de voltaje alrededor de una trayectoria cerrada suman cero, y las corrientes que entran a un nodo suman cero, lo cual vuelve a ocurrir luego de aplicarse la transformada de Laplace. Las leyes de Kirchhoff se aplican sin modificación en el dominio-s.

Considérese las leyes de elemento RLC:

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

Transformando ambos miembros:

$$\mathbf{V}_R(s) = R\mathbf{I}_R(s)$$

Ley de elemento para un **inductor** es:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Utilizando la regla de derivación, esta ecuación se convierte en el dominio-s en:

$$\mathbf{V}_L(s) = sL\mathbf{I}_L(s) - Li_L(0^-)$$

Ley de elemento para un **capacitor** es:

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

Transformando:

$$\mathbf{I}_C(s) = sC\mathbf{V}_C(s) - Cv_C(0^-)$$

Despejando $\mathbf{V}_C(s)$:

$$\mathbf{V}_C(s) = \frac{1}{sC}\mathbf{I}_C(s) + \frac{1}{s}v_C(0^-)$$

Estas ecuaciones demuestran que el voltaje $V(s)$ a través de los elementos RLC es la suma de un término proporcional a su corriente y a un término que depende de su condición inicial, este término es cero en caso de una resistencia.

Definimos a la **impedancia** $\mathbf{Z}(s)$ de un elemento RLC como la proporción de $\mathbf{V}(s)$ contra $\mathbf{I}(s)$ cuando todas las condiciones iniciales son cero.

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s) \quad (CI = 0)$$

Aplicando esta ecuación a las anteriores obtenemos las impedancias de cada elemento:

Para la resistencia $\mathbf{Z}_R = R$, **para el inductor** $\mathbf{Z}_L = sL$ **y para el capacitor** $\mathbf{Z}_C = \frac{1}{sC}$.

La impedancia es el factor de proporcionalidad entre voltaje y la corriente.

Definimos a la admitancia $\mathbf{Y}(s)$ de un elemento RLC como la proporción de corriente $\mathbf{I}(s)$ contra voltaje $\mathbf{V}(s)$ cuando todas las condiciones iniciales son cero.

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(s) \quad (CI = 0)$$

Aplicando esta ecuación a las anteriores obtenemos las admitancias de cada elemento, que resultan ser las inversas de cada impedancia.

Las leyes de Kirchhoff y leyes de elementos son la base para todos los demás teoremas de circuito que nos serán útiles, tales como las reglas para combinaciones en serie-paralelo, división de corriente y voltaje, y equivalentes de Thevenin-Norton. Puesto que las leyes de Kirchhoff son idénticas en el dominio del tiempo y en el dominio-s, la ley de elementos $\mathbf{V}(s)=\mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s)$ es de la misma forma que la ley de Ohm en el dominio del tiempo, por lo tanto estas reglas se aplican sin modificaciones en el dominio-s.

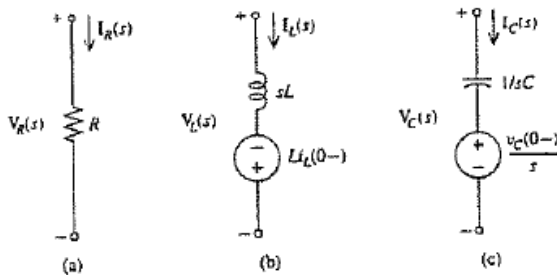
13.2 Circuitos en el dominio-s

Podemos escribir directamente ecuaciones de circuito en el dominio-s mediante inspección del diagrama de circuito. Pero al observar las formas v de las leyes de elemento vemos:

$$\mathbf{V}_R(s) = R\mathbf{I}_R(s)$$

$$\mathbf{V}_L(s) = sL\mathbf{I}_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$\mathbf{V}_C(s) = \frac{1}{sC}\mathbf{I}_C(s) + \frac{1}{s}v_C(0^-)$$



Excepto para la resistencia, para los elementos de almacenaje (inductor y capacitor) en el dominio de tiempo, son cada uno equivalente a dos elementos en serie en el dominio-s: una impedancia pura y un generador de condiciones iniciales.

En el dominio-s las caídas de voltaje alrededor de trayectorias cerradas siguen sumando cero, al igual que las corrientes en dominio-s en cada nodo o región cerrada.

S reemplaza a t en las corrientes y voltajes incógnitas, y las funciones de fuente independiente son reemplazadas por sus parejas de transformada en el dominio-s.

Al pasar al dominio-s es necesario agregar generadores de condiciones iniciales.

13.3 Función de transferencia

A veces solo necesitamos comprender la relación entre dos variables del circuito, sean estas, entrada y salida respectivamente.

El objetivo del análisis de entrada y salida es comprender su relación, en otras palabras, ser capaces de predecir la salida para cada valor posible de la entrada.

No es muy efectivo determinar todas las corrientes y voltajes del circuito en respuesta a todas las fuentes y condiciones iniciales, si nuestro propósito es una pequeña parte del circuito.

Para un circuito de entrada $\mathbf{V}_i(s)$ y salida $\mathbf{V}_o(s)$, defínase la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} \quad (CI = 0)$$

Requerimos que todas sus CI=0 con el fin de aislar la entrada seleccionada como la causa de la salida que calculamos.

$$\mathbf{V}_o(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s) \quad (CI = 0)$$

Es un análisis que nos permite predecir la salida que provocara determinada entrada haciendo uso de la función transferencia con sus CI=0.

Nos permite hacer esta predicción en un subconjunto estrechamente definido del circuito sin necesidad de analizarlo completamente.

Requerimos CI=0 con el fin de aislar la entrada seleccionada como la causa de la salida que calculamos. Una consecuencia de requerir CI=0 es que en este circuito nunca habrá generadores de CI.

Una vez que obtuvimos la salida $V_0(s)$ quizás la necesitemos en el dominio t, para esto será necesario aplicarle la transformada inversa.

Si $V_i(s) = 0$ entonces $V_0(s) = 0$, pero este podría no ser el caso si hubiera otras fuentes independientes que contribuyeran a $V_0(s)$, por esto es que deben eliminarse antes de calcular $H_0(s)$.

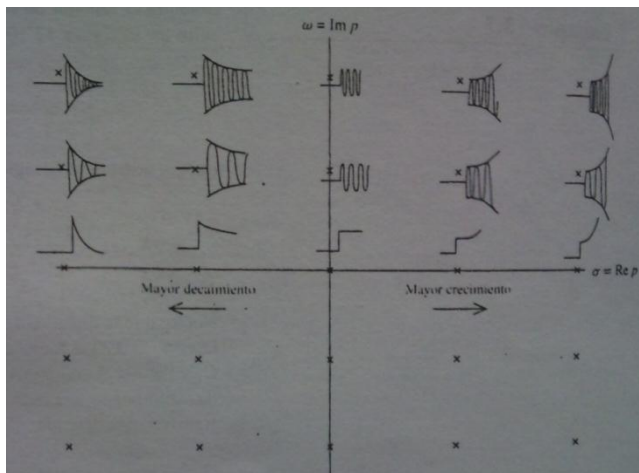
En un circuito con **entradas múltiples**, la salida forzada en el dominio-s debido a las fuentes, es la superposición de las funciones de transferencias separadas para cada entrada, multiplicado por el valor de las correspondientes entradas en dominio-s.

$$V_0(s) = H_1(s)V_1(s) + H_2(s)V_2(s) + \dots + H_n(s)V_n(s)$$

Para circuitos con más de una fuente independiente deben eliminarse las demás fuentes y dejar una sola, para esta fuente calcular la salida, y repetir el proceso para las demás fuentes.

Por último la salida total seria la superposición de todas estas salidas.

13.4 Polos y estabilidad



Para Ke^{pt} en $f(t)$ existe un polo p en su transformada $F(s)$.

Sea $p = \sigma + j\omega$, sea $e^{pt} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$

Si $\omega = 0 \rightarrow$ polo puramente real, en el eje horizontal.

$e^{\sigma t}$ para $\sigma < 0$ decae a cero.
para $\sigma = 0$ es constante.
para $\sigma > 0$ crece sin limite.

Si $\omega \neq 0 \rightarrow$ polo complejo. En la figura se ve e^{pt} y e^{p^*t} que es el polo conjugado complejo.

$$e^{pt} + e^{p^*t} = 2e^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

Podemos ver que la parte real del polo gobierna el ritmo de crecimiento o decaimiento.

Los polos de un sistema dictan la suerte que correrá su respuesta natural.

- Si $\text{Re}(p) < 0$ la respuesta natural decae a cero.
- Si $\text{Re}(p) = 0$ no crecerá ni decaerá.
- Si $\text{Re}(p) > 0$ crece indefinidamente.

Un circuito es estable si todas las respuestas naturales en el circuito decaen a cero respecto al tiempo. Razón por la cual la estabilidad de un circuito es equivalente a $\text{Re}(p) < 0$ para cualquier polo p del circuito.

La estabilidad requiere que los polos del circuito permanezcan en la mitad izquierda del plano complejo.

El análisis en estado estable es únicamente aplicable a circuitos estables. Los valores a largo plazo de corrientes y voltajes en circuitos inestables dependen fuertemente de sus CI. No existe un estado estable para circuitos de esta naturaleza.

Debido a que no se puede aplicar el análisis de estado estable en circuitos que no son estables, antes de iniciar un cálculo se sugiere investigar la estabilidad del mismo. Esto se hace viendo que todos los polos del circuito tengan parte real negativa.

Para la función transferencia:

$$\mathbf{V}_0(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s) \quad (CI = 0)$$

Si el circuito es estable, la respuesta natural decaerá a cero. La respuesta forzada determinada mediante la ecuación anterior tenderá a la respuesta real y total a una precisión arbitraria conforme $t \rightarrow \infty$. Si el circuito es inestable, la respuesta total diferirá de la forzada determinada por el análisis de la función transferencia por un término que bien podría tender a infinito.

13.5 Teoremas de valor inicial y final

Con estos teoremas podemos determinar el valor inicial de una función de tiempo $f(0+)$ y su valor final $f(\infty)$ a partir de su transformada $F(s)$

Teorema de valor **inicial**: $\lim_{s \rightarrow \infty} s\mathbf{F}(s) = f(0+)$

Teorema de valor **final**: $\lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{F}(s) = f(\infty)$

El principal beneficio de estos dos teoremas, es que no necesitamos calcular una transformada inversa para descubrir sus valores inicial y final.

13.6 Respuesta al pulso y convolución

A partir de

$$\mathbf{V}_0(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s) \quad (CI = 0)$$

Si tomamos la entrada $v_i(t)$ como la función de impulso unitario: $v_i(t) = \delta(t)$

Puesto que $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

$$\mathbf{H}(s)(1) = \mathbf{H}(s)$$

O en el dominio del tiempo:

$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)] = h(t)$$

La función $h(t)$ siendo la salida causada por la entrada de impulso unitario cuando todas las CI=0 se denomina respuesta de impulso unitario.

$h(t)$ y $H(s)$ son pareja de transformada de Laplace. Puesto que ningún circuito puede dar respuesta a una entrada hasta que esta se inicie, requerimos que $h(t) = 0$ para $t < 0$.

¿Cuál es el equivalente en el dominio del tiempo de la expresión $\mathbf{V}_0(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s) \quad (CI = 0)$? Definamos

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

$d(t)$ es la convolución de $f(t)$ y $g(t)$. Ambas son cero para $t < 0$. Transformando,

$$\mathbf{D}(s) = \int_{0-}^{\infty} \left[\int_{0-}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right] e^{-st} dt$$

El límite inferior de la integral de abajo fue reemplazado por cero ya que la función es cero para t menor que 0.

Invirtiendo el orden de integración:

$$\mathbf{D}(s) = \int_{0-}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{0-}^{\infty} g(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau$$

La integral de adentro es la transformada de $g(t-\tau)$:

$$\mathbf{D}(s) = \int_{0-}^{\infty} f(\tau) [e^{-s\tau} \mathbf{G}(s)] d\tau$$

Sacando a $\mathbf{G}(s)$ de la integral, lo que queda es $\mathbf{F}(s)$ y tenemos la siguiente propiedad:

$$\mathbf{L} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] = \mathbf{F}(s) \mathbf{G}(s)$$

La transformada de Laplace de la convolución de dos funciones de tiempo es el producto de sus transformadas de Laplace.

[Ver método gráfico.](#)

Respuesta de frecuencia

14.1 La función de respuesta de frecuencia

Sea la fuente $v_1(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta)}$, podemos obtener el fasor $\mathbf{V}_1 = V_m \angle \theta$, y así escribir a la fuente

$$v_1(t) = \mathbf{V}_1 e^{j\omega t}$$

Puesto que

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}_i e^{j\omega t}) = \frac{\mathbf{V}_i}{s - j\omega}$$

Entonces

$$\mathbf{V}_o(s) = \frac{\mathbf{H}(s) \mathbf{V}_i}{s - j\omega}$$

La respuesta forzada

$$v_o(t) = \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{\mathbf{H}(j\omega) \mathbf{V}_i}{s - j\omega} \right] = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{V}_i e^{j\omega t}$$

Por definición, el fasor $\mathbf{V}_o$ asociado con esta salida $v_o(t)$ es la cantidad que multiplica $e^{j\omega t}$,

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{V}_i$$

$\mathbf{H}(j\omega)$, la función de transferencia $\mathbf{H}(s)$ donde se sustituye s por $j\omega$, multiplica el fasor de entrada para dar el fasor de salida. Definimos $\mathbf{H}(j\omega)$ como la **función de respuesta de frecuencia**.

Entonces $\mathbf{V}_o = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{V}_i$ a la que nos referiremos como la **ecuación de respuesta de frecuencia**, asegura que para circuitos estables, el fasor de salida es el producto del fasor de entrada y la función de respuesta de frecuencia $\mathbf{H}(j\omega)$. Dado $\mathbf{H}(s)$, o equivalentemente $\mathbf{H}(j\omega)$, podemos determinar la salida en estado estable sinusoidal de cualquier circuito lineal estable en cualquier frecuencia.

A partir de $|\mathbf{V}_o| = |\mathbf{H}(j\omega)| |\mathbf{V}_i|$, y sabiendo que la magnitud de un fasor es la amplitud del senoide correspondiente, concluimos en que $|\mathbf{H}(j\omega)|$ se conoce como la **ganancia del circuito**. Y a partir de $\angle \mathbf{V}_o = \angle \mathbf{H}(j\omega) + \angle \mathbf{V}_i$, y sabiendo que el ángulo de un fasor es idéntico al ángulo del senoide, el desplazamiento de fase que existe entre la entrada y la salida que está dada por el ángulo de respuesta de frecuencia $\angle \mathbf{H}(j\omega)$ se conoce como **desplazamiento de fase**.

De este modo dada cualquier respuesta de frecuencia $\mathbf{H}(j\omega)$, obtenemos una descripción completa de la forma en que el circuito responde a entradas de cualquier frecuencia.

14.2 Escala del Decibel

La escala más común utilizada para medir ganancia es una escala logarítmica conocida como escala en decibels, que se define para los números reales positivos R por

$$R(\text{dB}) = 20 \log_{10} R$$
$$\text{ganancia}(\text{dB}) = 20 \log_{10} \frac{|H(j\omega_2)|}{|H(j\omega_1)|}$$

Cuando dB esta entre paréntesis después de un numero R, debe leerse como “el numero R, al convertirse a decibels, es” en tanto que un dB junto a un número sin paréntesis indica que el valor ya está medido en unidades de decibels, por ej. “+20”.

Sean R y S dos números:

$$RS(\text{dB}) = R(\text{dB}) + S(\text{dB})$$

$$\frac{R}{S}(\text{dB}) = 20 \log_{10} R - 20 \log_{10} S = R(\text{dB}) - S(\text{dB})$$

Valores comunes:

$1(\text{dB}) = 20 \log_{10} 1 = 0$	$10(\text{dB}) = 20 \log_{10} 10 = +20\text{dB}$
$10 \cdot S(\text{dB}) = +20\text{dB} + 20 \log_{10} S$	$\frac{S(\text{dB})}{10} = 20 \log_{10} S - 20\text{dB}$
$2(\text{dB}) = 20 \log_{10} 2 = 6.02\text{dB} \cong 6\text{dB}$	$\sqrt{2}(\text{dB}) = 20 \log_{10} 2^{1/2} = 10 \log_{10} 2 = 3.01\text{dB} \cong 3\text{dB}$

14.3 Graficas de ganancia de Bode (Amplitud)

Las gráficas de ganancia de Bode y graficas de fase de Bode son un invento simple pero preciso para graficar ganancia y desplazamientos de fase.

La gráfica de Bode no corregida tiene una aproximación lineal por tramos a la gráfica de ganancia dB contra la frecuencia logarítmica.

La gráfica de Bode no corregida es la suma de gráficas de factores individuales.

Los segmentos de línea recta para $\omega \ll a$ y $\omega \gg a$ se interceptan en $\omega = |a|$. Por esta razón, $\omega = |a|$ se conoce como frecuencia de corte. El error máximo entre la gráfica corregida y la no corregida ocurre en la frecuencia de corte y es de 3dB.

14.4 Resonancia

Los circuitos **resonantes** son aquellos que tratan un rango estrecho de frecuencias de forma muy distinta a las demás. La ganancia en un circuito altamente resonante logra un claro máximo o mínimo en su frecuencia de resonancia.

Definimos a la **frecuencia de resonancia** ω_r como la frecuencia en la que la ganancia $|H(j\omega)|$ pasa a través de su máximo o mínimo.

Defínase la **amplitud de banda** B de un circuito resonante como la diferencia $B = \omega_u - \omega_l$, donde ω_u y ω_l son las frecuencias en las que la ganancia es 3 dB por debajo de su valor en ω_r (o 3 dB por encima de su valor ω_r y la resonancia es un mínimo de la ganancia). $\omega_u > \omega_r$ se conoce como la frecuencia de semi-potencia superior y $\omega_l < \omega_r$ la frecuencia de semi-potencia inferior.

Definamos el **factor de calidad** Q como la proporción de frecuencia de resonancia contra la amplitud de banda, $Q = \omega_r/B$. Mientras mayor sea el factor de calidad Q, el circuito será más selectivo de frecuencia en sentido fraccional.

Ver en libro estos valores para circuitos RLC en serie y paralelo.

14.5 Respuesta de frecuencia de los Op Amps

En esta sección vimos que el op-amp es sumamente dependiente de la frecuencia, con una amplitud de banda demasiado reducida para ser de trayectoria abierta de uso práctico. Sin embargo, al configurarse en un circuito de retroalimentación negativa, tales como los circuitos de componentes presentes anteriormente, la amplitud de banda se incrementará aproximadamente en proporción a la pérdida de ganancia.

Repasar.

14.6 Filtros

Un filtro es un dispositivo que impide el paso de señales cuyas frecuencias caen dentro de una banda conocida como la banda de detención, y permite que las señales que están en la banda de paso, pasen de la entrada a la salida relativamente sin modificaciones.



Los filtros reciben su nombre según su banda de paso. Si consiste de todas las $\omega \leq \omega_c$ para algunas ω_i , tenemos un filtro de pasa-bajas con frecuencia de corte ω_c . Si en vez de eso, la banda de paso es el conjunto de frecuencias dadas por encima de una frecuencia de corte ω_c , $\omega \geq \omega_c$, tenemos un filtro pasa-altas.

La frecuencia de corte ω_c es la frecuencia a la que la ganancia está 3 dB por debajo de su valor máximo.

Un filtro de paso de banda tiene una banda de paso $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$, donde ω_l y ω_u son las frecuencias de media potencia superior e inferior.

Un filtro elimina banda tiene una banda de paso dividida, todas las $\omega \leq \omega_l$ y todas las $\omega \geq \omega_u$.

Podemos construir un filtro pasa-banda combinando un pasa-bajas con un pasa-altas, donde la función de transferencia será $\mathbf{H}_{BP}(j\omega) = \mathbf{H}_{LP}(j\omega)\mathbf{H}_{HP}(j\omega)$, y debemos fijar la frecuencia de corte del filtro pasa-altas ω_{CHP} a un límite menor que el de pasa-bajas, $\omega_{CHP} < \omega_{CLP}$. Si estos dos filtros son ideales entonces tendrán la respuesta de frecuencia de la banda de paso ideal $\mathbf{H}(j\omega) = 1$ para todas las ω entre $\omega_l = \omega_{CHP}$ y $\omega_u = \omega_{CLP}$, y $\mathbf{H}(j\omega) = 0$ en todos los demás lugares. Para filtros no ideales, la ganancia de la banda de paso será cercana a la unidad donde su banda de paso es $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$, y tendrá una ganancia menor a $1/\sqrt{2}$ fuera de la banda de paso.

Un filtro construido enteramente de elementos pasivos (RLC) es un filtro pasivo. Si se usan op-amps u otros circuitos con dispositivos electrónicos que requieren de suministros de potencia, obtenemos un filtro activo.

Los filtros pasivos que corresponden a funciones de transferencia que contienen factores de parejas de raíces complejas requieren inductores y capacitores, y los inductores tienden a ser elementos indeseables en el diseño moderno de circuitos miniaturizados. Ocupan mucho espacio, son costosos y tienen suficiente resistencia en serie para hacerlos generalmente útiles únicamente en aplicaciones de Q relativamente baja.

Los filtros pasivos son disipativos, en otras palabras, no pueden tener ganancias mayores que la unidad en cualquier frecuencia.

Elementos activos: proporcionan excitación eléctrica, ganancia o control.

Elementos pasivos: son los encargados de la conexión entre los diferentes componentes activos, asegurando la transmisión de las señales eléctricas o modificando su nivel.

14.7 Diseño de filtros activos

Las desventajas de los filtros pasivos sobre los activos son:

- Requieren capacitores e inductores.
- Ocupan espacio y son costosos.
- No pueden tener ganancia mayor que 1 a cualquier frecuencia.
- Conectar filtros pasivos en cascada, produce el efecto de “carga”.

Ventajas de los filtros activos sobre los pasivos:

- Diseño de orden superior.
- No requieren inductores.
- Se puede obtener cualquier ganancia deseada.
- Al conectar filtros activos en cascada, no sufren el efecto de “carga”.

Etapas de **diseño**:

1. La función de transferencia $H(s)$ o la función de respuesta de frecuencia $H(j\omega)$ explica cómo trata el circuito las diferentes frecuencias.
2. Se hace un gráfico de Bode que muestra nuestra $H(s)$ y se comprueba si el filtro se comporta a las frecuencias de trabajo, en la forma deseada.
3. Las ganancias, pendientes, amplitud de las bandas de paso y rechazo de $H(s)$, se pueden modificar ajustando los polos, ceros y el factor constante k .