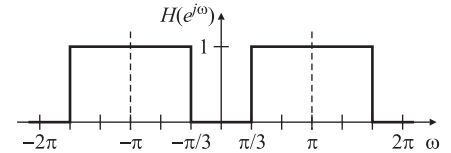


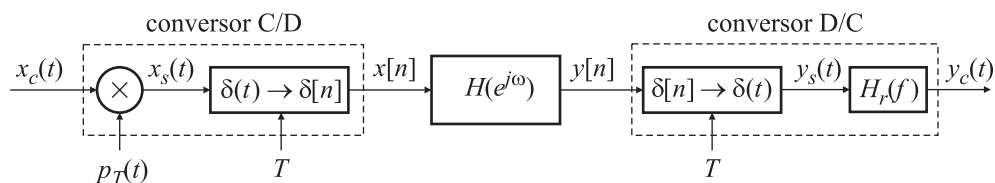
1. La señal $x_c(t) = 1 + 3 \cos(2\pi f_0 t) + 4 \cos(2\pi f_1 t)$ con $f_0 = 2000$ Hz, y $f_1 = 5000$ Hz, se muestrea a $f_s = 1/T = 8000$ Hz, obteniéndose la señal discreta $x[n] = x_c(n/f_s) = x_c(nT)$.
- (a) Calcule el espectro $X_c(f)$ de $x_c(t)$ y dibuje su módulo indicando los puntos destacados (frecuencias, amplitudes, etc.).
- (b) Calcule el espectro $X_s(f)$ de $x_s(t)$ y dibuje su módulo indicando los puntos destacados (frecuencias, amplitudes, etc.).
- (c) Calcule el espectro $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$, indicando las frecuencias discretas ω_i comprendidas en el rango $(-\pi, \pi)$ y las amplitudes correspondientes. Dibuje el módulo de $X(e^{j\omega})$, indicando los puntos destacados.
- (d) La señal $x[n]$ se filtra con un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\omega| < \pi/3, \\ 1, & \text{si } \pi/3 < |\omega| < \pi. \end{cases}$$



Calcule la salida de estado estacionario $y[n]$, y dibuje su espectro $Y(e^{j\omega})$.

- (e) La señal discreta $y[n]$ se aplica a un conversor D/C ideal para obtener la señal continua $y_c(t)$. Calcule y dibuje el espectro $Y_s(f)$ de $y_s(t)$.
- (f) Especifique y dibuje la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor ideal.
- (g) Calcule y grafique el espectro $Y_c(f)$ de $y_c(t)$.
- (h) Escriba explícitamente la expresión temporal de $y_c(t)$.
- (i) Calcule la expresión de la función transferencia del sistema continuo, $H_c(f) = Y_c(f)/X_c(f)$.



2. Para el sistema del problema anterior,
- (a) Calcule $y_c(t)$ si $x_c(t) = u(t+T/10) - u(t-T/10)$.
- (b) Repita el ejercicio para una entrada $x_c(t) = u(t-T/10) - u(t-3T/10)$.
- (c) ¿Qué puede decir del sistema a partir de los resultados de los incisos anteriores? ¿Por qué?
3. Si $X[k]$ es la TDF de orden N de $x[n]$, encuentre la relación entre $y[n]$ y $x[n]$ si $y[n]$ es la TDF inversa de

$$Y[k] = \frac{1}{2}X[((k-1))_N] + X[k] + \frac{1}{2}X[((k+1))_N].$$

Derive las expresiones de las propiedades utilizadas para llegar a su resultado.

4. La respuesta en frecuencia de un sistema discreto es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & \text{si } -\pi < \omega < 0, \\ -j, & \text{si } 0 < \omega < \pi. \end{cases}$$

- (a) Calcule la respuesta impulsiva $h[n]$.
- (b) Determine la salida de estado estacionario si la entrada es $x[n] = A \cos(\omega_0 n) + A \sin(\omega_1 n)$, para $0 < \omega_0 < \omega_1 < \pi$.

dominio frecuencial (Ω)	dominio temporal	dominio frecuencial (f)
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c \left[\frac{1}{T_s} (\omega - 2\pi k) \right]$	$x[n] = x_c(nT_s)$	$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c \left[\frac{f_s}{2\pi} (\omega - 2\pi k) \right]$
$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$	$y[n] = x[n] * h[n]$	$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$
$Y_s(\Omega) = Y(e^{j\omega}) \Big _{\omega=\Omega \frac{2\pi}{\Omega_s}} = \Omega T_s$	$y_s(t) = \sum_n y[n] \delta(t - nT_s)$	$Y_s(f) = Y(e^{j\omega}) \Big _{\omega=f \frac{2\pi}{f_s}} = 2\pi f T_s$
$Y_r(f) = H_r(\Omega) Y_s(\Omega)$ $= T_s H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \Big _{\omega=\Omega \frac{2\pi}{\Omega_s}} = \Omega T_s$	$y_r(t) = \sum_n y[n] h_r(t - nT_s)$	$Y_r(f) = H_r(f) Y_s(f)$ $= T_s H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \Big _{\omega=f \frac{2\pi}{f_s}} = 2\pi f T_s$
$H_c(\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega}) \Big _{\omega=\Omega \frac{2\pi}{\Omega_s}} = \Omega T_s, & \text{si } \Omega < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$		$H_c(f) = \begin{cases} H(e^{j\omega}) \Big _{\omega=f \frac{2\pi}{f_s}} = 2\pi f T_s, & \text{si } f < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T_s}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$

Serie de Fourier (SF)	Transformada de Fourier (TF)	Transf. de Fourier de señales discretas (TFTD)	Transf. Discreta de Fourier (TDF)
$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$	$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
Varios	$\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k = \frac{1-\rho^N}{1-\rho}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$	$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$	$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega n} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\text{sen}(N\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$

Problema 1

La señal $x_c(t) = 1 + 3 \cos(2\pi f_0 t) + 4 \cos(2\pi f_1 t)$ con $f_0 = 2000$ Hz, y $f_1 = 5000$ Hz se muestrea a $f_s = 1/T = 8000$ Hz, obteniéndose la señal discreta

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(t)|_{t=n/f_s} = 1 + 3 \cos(2\pi f_0 t) + 4 \cos(2\pi f_1 t)|_{t=n/f_s} \\ &= 1 + 3 \cos(2\pi f_0 / f_s n) + 4 \cos(2\pi f_1 / f_s n) \\ &= 1 + 3 \cos\left(2\pi \frac{2000}{8000} n\right) + 4 \cos\left(2\pi \frac{5000}{8000} n\right) \\ &= 1 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) + 4 \cos\left(\frac{5}{4} \pi n\right) \end{aligned}$$

Como $\cos\left(\frac{5}{4} \pi n\right) = \cos\left(\frac{5}{4} \pi n - 2\pi n\right) = \cos\left(-\frac{3}{4} \pi n\right) = \cos\left(\frac{3}{4} \pi n\right)$, la señal $x[n]$ puede escribirse como

$$x[n] = 1 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) + 4 \cos\left(\frac{3}{4} \pi n\right)$$

donde las frecuencias discretas son $\omega_0 = 2\pi(f_0/f_s) = \pi/2$ y $\omega_{1a} = 3\pi/4$. La frecuencia discreta original $\omega_1 = 2\pi(f_1/f_s) = 5\pi/4$ queda fuera del intervalo $(-\pi, \pi)$, pero se puede representar con una señal de frecuencia $\omega_{1a} = 3\pi/4$ que queda dentro de dicho intervalo.

Inciso (a): Espectro $X_c(f)$

Como

$$\begin{aligned} x_c(t) &= 1 + 3 \cos(2\pi f_0 t) + 4 \cos(2\pi f_1 t) \\ &= 1e^{j2\pi \times 0 \times t} + \frac{3}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}) + \frac{4}{2} (e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_1 t}), \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta el par transformado $e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow \delta(f - f_0)$, resulta

$$X_c(f) = \delta(f) + \frac{3}{2} \delta(f - f_0) + \frac{3}{2} \delta(f + f_0) + 2\delta(f - f_1) + 2\delta(f + f_1),$$

que se representa en la Fig. 1(a).

Inciso (b): Espectro $X_s(f)$

La señal $x_s(t)$ se puede escribir como

$$x_s(t) = x_c(t)p_T(t),$$

donde $p_T(t)$ es el tren de impulsos, $p_T(t) = \sum_r \delta(t - rT)$, cuya transformada es

$$P_T(f) = \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - kf_s).$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de convolución frecuencial, se tiene que

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X_c(f) * P_T(f). \\ &= X_c(f) * \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T} \sum_k X_c(f - kf_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - kf_s) + \frac{3}{2} \delta(f - f_0 - kf_s) + \frac{3}{2} \delta(f + f_0 - kf_s) + 2\delta(f - f_1 - kf_s) + 2\delta(f + f_1 - kf_s) \end{aligned}$$

que se muestra en la Fig. 1(b).

Inciso (c): Espectro $X(e^{j\omega})$

El espectro $X(e^{j\omega})$ se puede calcular como

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= X_s(f)|_{f=\frac{\omega}{2\pi}f_s} \\
&= \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - kf_s) + \frac{3}{2} \delta(f - f_0 - kf_s) + \frac{3}{2} \delta(f + f_0 - kf_s) + 2\delta(f - f_1 - kf_s) + 2\delta(f + f_1 - kf_s) \Big|_{f=\frac{\omega}{2\pi}f_s} \\
&= \frac{1}{T} \sum_k \delta(\frac{\omega}{2\pi}f_s - kf_s) + \frac{3}{2} \delta(\frac{\omega}{2\pi}f_s - f_0 - kf_s) + \frac{3}{2} \delta(\frac{\omega}{2\pi}f_s + f_0 - kf_s) + \\
&\quad \frac{1}{T} \sum_k 2\delta(\frac{\omega}{2\pi}f_s - f_1 - kf_s) + 2\delta(\frac{\omega}{2\pi}f_s + f_1 - kf_s) \\
&= \frac{1}{T} \sum_k \delta\left[\frac{f_s}{2\pi}(\omega - 2\pi k)\right] + \frac{3}{2} \delta\left[\frac{f_s}{2\pi}(\omega - 2\pi \frac{f_0}{f_s} - 2\pi k)\right] + \frac{3}{2} \delta\left[\frac{f_s}{2\pi}(\omega + 2\pi \frac{f_0}{f_s} - 2\pi k)\right] + \\
&\quad \frac{1}{T} \sum_k 2\delta\left[\frac{f_s}{2\pi}(\omega - 2\pi \frac{f_1}{f_s} - 2\pi k)\right] + 2\delta\left[\frac{f_s}{2\pi}(\omega + 2\pi \frac{f_1}{f_s} - 2\pi k)\right] \\
&= \frac{2\pi}{Tf_s} \sum_k \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{3}{2} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \frac{3}{2} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) + \\
&\quad \frac{2\pi}{Tf_s} \sum_k 2\delta(\omega - \omega_1 - 2\pi k) + 2\delta(\omega + \omega_1 - 2\pi k) \\
&= \sum_k 2\pi \delta(\omega - 2\pi k) + 3\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + 3\pi \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) + \\
&\quad \sum_k 4\pi \delta(\omega - \omega_1 - 2\pi k) + 4\pi \delta(\omega + \omega_1 - 2\pi k)
\end{aligned}$$

donde $\omega_0 = 2\pi(f_0/f_s) = \pi/2$ y $\omega_1 = 5\pi/4$. También se ha aplicado la propiedad de escalado del impulso, $\delta(at) = (1/a)\delta(t)$. De acuerdo a lo indicado más arriba, $\cos(\omega_1 n) = \cos(\omega_{1a} n)$, con $\omega_{1a} = 3\pi/4$. De modo que

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_k 2\pi \delta(\omega - 2\pi k) + 3\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + 3\pi \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) + \\
&\quad \sum_k 4\pi \delta(\omega - \omega_{1a} - 2\pi k) + 4\pi \delta(\omega + \omega_{1a} - 2\pi k).
\end{aligned}$$

Este espectro se grafica en la Fig. 1(c).

Inciso (d): Espectro $Y(e^{j\omega})$

La señal $x[n]$ se filtra con un sistema discreto cuya respuesta en frecuencia es tipo pasaalto,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/3, \\ 1, & \pi/3 < |\omega| < \pi, \end{cases}$$

que se representa en la Fig. 1(d). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\
&= \sum_k 3\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + 3\pi \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) + 4\pi \delta(\omega - \omega_{1a} - 2\pi k) + 4\pi \delta(\omega + \omega_{1a} - 2\pi k).
\end{aligned}$$

En síntesis, el filtro remueve la componente de continua $\delta(\omega)$ y sus réplicas, $\delta(\omega + 2\pi r)$, como se muestra en la Fig. 1(e).

Inciso (e): Espectro $Y_s(f)$

La señal $y_s(t)$ se obtiene escalando temporalmente la señal discreta $y[n]$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 Y_s(f) &= Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{f}{f_s}2\pi} \\
 &= \sum_k 3\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + 3\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) + 4\pi\delta(\omega-\omega_{1a}-2\pi k) + 4\pi\delta(\omega+\omega_{1a}-2\pi k) \Big|_{\omega=\frac{f}{f_s}2\pi} \\
 &= \sum_k 3\pi\delta\left(\frac{f}{f_s}2\pi-\omega_0-2\pi k\right) + 3\pi\delta\left(\frac{f}{f_s}2\pi+\omega_0-2\pi k\right) + \\
 &\quad \sum_k 4\pi\delta\left(\frac{f}{f_s}2\pi-\omega_{1a}-2\pi k\right) + 4\pi\delta\left(\frac{f}{f_s}2\pi+\omega_{1a}-2\pi k\right) \\
 &= \sum_k 3\pi\delta\left[\frac{2\pi}{f_s}\left(f-\omega_0\frac{f_s}{2\pi}-2\pi k\frac{f_s}{2\pi}\right)\right] + 3\pi\delta\left[\frac{2\pi}{f_s}\left(f+\omega_0\frac{f_s}{2\pi}-2\pi k\frac{f_s}{2\pi}\right)\right] + \\
 &\quad \sum_k 4\pi\delta\left[\frac{2\pi}{f_s}\left(f-\omega_{1a}\frac{f_s}{2\pi}-2\pi k\frac{f_s}{2\pi}\right)\right] + 4\pi\delta\left[\frac{2\pi}{f_s}\left(f+\omega_{1a}\frac{f_s}{2\pi}-2\pi k\frac{f_s}{2\pi}\right)\right] \\
 &= \frac{f_s}{2\pi} \sum_k 3\pi\delta(f-f_0-kf_s) + 3\pi\delta(f+f_0-kf_s) + 4\pi\delta(f-f_{1a}-kf_s) + 4\pi\delta(f+f_{1a}-kf_s)
 \end{aligned}$$

de modo que

$$Y_s(f) = \frac{1}{T} \sum_k \left[\frac{3}{2}\delta(f-f_0-kf_s) + \frac{3}{2}\delta(f+f_0-kf_s) + 2\delta(f-f_{1a}-kf_s) + 2\delta(f+f_{1a}-kf_s) \right].$$

donde $f_{1a} = \omega_{1a}f_s/(2\pi) = 3\pi/4 \times 8000/(2\pi) = 3000$ Hz. Este espectro se grafica en la Fig. 1(f).

Inciso (f): Filtro rector ideal

La respuesta en frecuencia del filtro rector es

$$H_r(f) = \begin{cases} T, & |f| < f_s/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y se representa en la Fig. 1(g). La respuesta impulsiva es

$$h_r[n] = \text{sinc}(f_s t).$$

Inciso (g): Espectro $Y_c(f)$

La señal continua de salida $y_c(t)$ se obtiene filtrando la señal impulsiva $y_s(t)$ por el filtro rector ideal. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 Y_c(f) &= H_r(f)Y_s(f) \\
 &= H_r(f) \left[\frac{1}{T} \sum_k \left[\frac{3}{2}\delta(f-f_0-kf_s) + \frac{3}{2}\delta(f+f_0-kf_s) + 2\delta(f-f_{1a}-kf_s) + 2\delta(f+f_{1a}-kf_s) \right] \right] \\
 &= \frac{3}{2}\delta(f-f_0) + \frac{3}{2}\delta(f+f_0) + 2\delta(f-f_{1a}) + 2\delta(f+f_{1a})
 \end{aligned}$$

tal como se muestra en la Fig. 1(h).

Inciso (h): señal temporal $y_c(t)$

A partir del espectro $Y_s(f)$ calculado en el inciso anterior, se puede encontrar que

$$y_c(t) = 3\cos(2\pi f_0 t) + 4\cos(2\pi f_{1a} t) = 3\cos(2\pi 2000 t) + 4\cos(2\pi 3000 t).$$

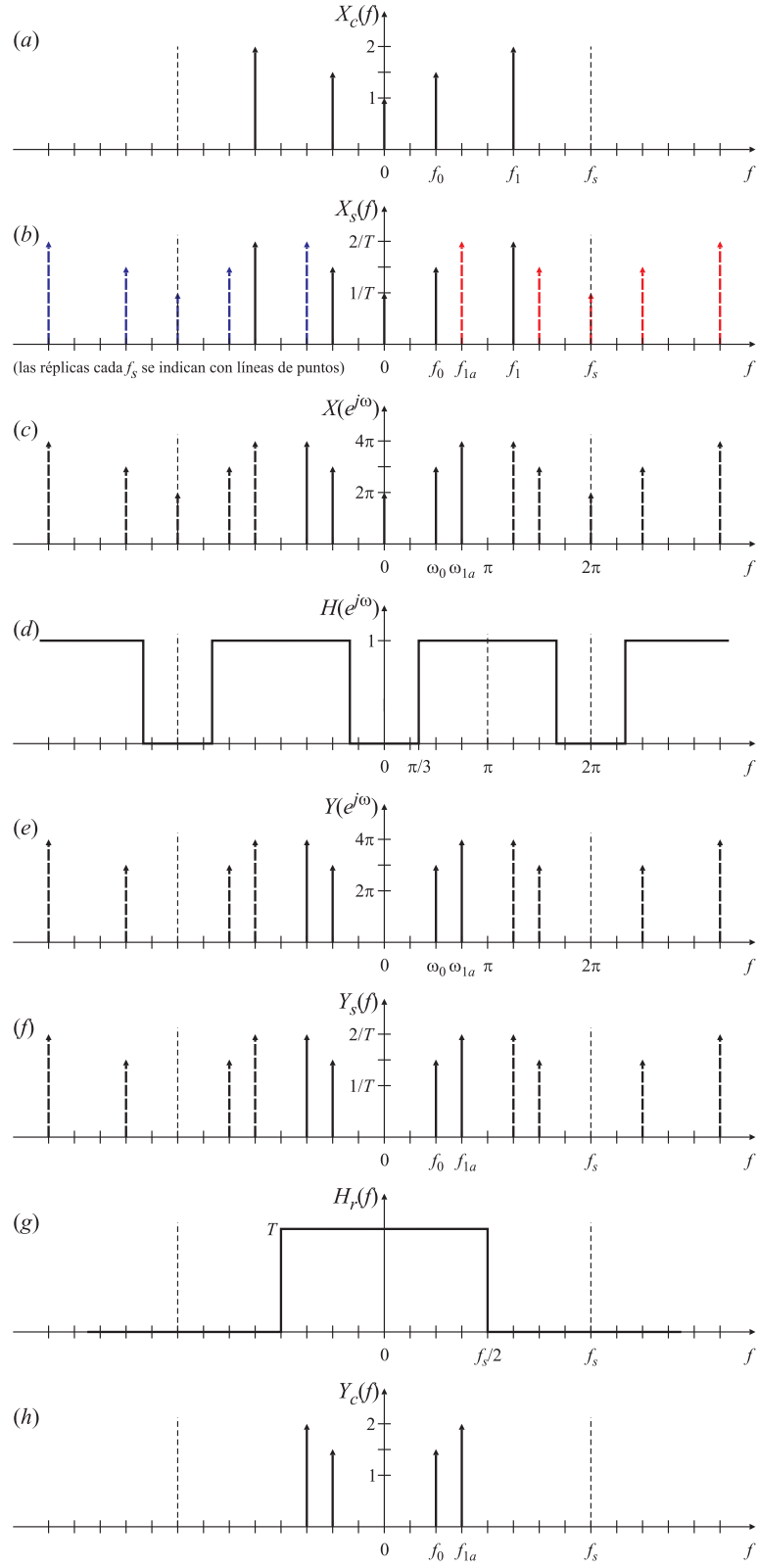


Figura 1: Espectros de las distintas señales del Problema 1.

Inciso (i): Función transferencia del sistema continuo

Para señales de ancho de banda limitada, y que satisfagan el criterio de Nyquist (que su mayor componente frecuencial sea menor a $f_s/2$) la respuesta en frecuencia del sistema continuo es

$$H_c(f) = \frac{Y_c(f)}{X_c(f)} = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{f}{f_s}2\pi}, & |f| < f_s/2 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $H(e^{j\omega})$ se tiene que

$$H_c(f) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{3} < |\frac{f}{f_s}2\pi| < \pi \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{3} \frac{f_s}{2\pi} < |f| < \pi \frac{f_s}{2\pi} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & f_s/6 < |f| < f_s/2 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

que puede escribirse como

$$H_c(f) = \begin{cases} 1, & \frac{4}{3} \text{ kHz} < |f| < 4 \text{ kHz}, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para asegurar que el sistema se comporta como uno lineal e invariante en el tiempo para *cualquier* tipo de entrada, debe colocarse un filtro *antialiasing* antes del conversor C/D.

Problema 2

Inciso (a)

En este ejercicio la señal de entrada $x_c(t) = u(t + T/10) - u(t - T/10)$ [Fig. 2(a)] no es de banda limitada, ya que su espectro es $X_c(f) = (T/5) \text{sinc}(Tf/5)$ [Fig. 2(b)] y por lo tanto los pasos deben hacerse con cuidado.

Cuando $x_c(t)$ se muestrea con el tren de impulsos $p_T(t)$ lo que se obtiene es la señal $x_s(t) = \delta(t)$ que se representa en la Fig. 2(c). El espectro $X_s(f)$ está formado por las infinitas réplicas (cada f_s) de $X_c(f)$. Como $X_c(f)$ no es de banda limitada, las réplicas se solapan, de modo que

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \frac{1}{T} \sum_r X_c(f - rf_s) = \frac{1}{T} \sum_r (T/5) \text{sinc}[(T/5)(f - rf_s)] \\ &= \frac{1}{5} \sum_r \text{sinc}(Tf/5 - r/5). \end{aligned}$$

Esta suma es complicada de resolver (y más en un parcial) pero el espectro $X_s(f)$ se puede calcular transformando $x_s(t)$:

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1,$$

que se representa en la Fig. 2(d).

La señal discreta $x[n]$ resulta de convertir los impulsos continuos en impulsos discretos, cuyo valor es el área del impulso continuo. En consecuencia, $x[n] = \delta[n]$ [Fig. 2(e)], y su espectro es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n} = 1.$$

como se muestra en la Fig. 2(f). Aquí se verifica que $X(e^{j\omega}) = X_s(f)|_{f=\omega \frac{f_s}{2\pi}}$.

La salida $y[n]$ del sistema discreto con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/3 \\ 1, & \pi/3 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

es la respuesta impulsiva del sistema discreto, ya que la entrada es un impulso ($x[n] = \delta[n]$), y por lo tanto se puede calcular como la antitransformada de $H(e^{j\omega})$. Este es un pasaalto con frecuencia

de corte en $\pi/3$, como se muestra en la Fig. 2(h). Hay varias maneras de calcular $h[n]$, por ejemplo antitransformando $H(e^{j\omega})$,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

pero una particularmente sencilla es escribir el pasabajas como la diferencia entre una constante y un pasabajos, es decir,

$$H(e^{j\omega}) = 1 - H_{PB}(e^{j\omega}),$$

de donde

$$h[n] = \delta[n] - h_{PB}[n],$$

donde $H_{PB}(e^{j\omega})$, $h_{PB}[n]$ son la respuesta en frecuencia y la respuesta impulsiva, respectivamente, de un pasabajos con frecuencia de corte en $\pi/3$. Es sencillo calcular que

$$\begin{aligned} h_{PB}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{PB}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{j2\pi n} (e^{j\pi n/3} - e^{-j\pi n/3}) \\ &= \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n} = \frac{1}{3} \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n/3} = \frac{1}{3} \text{sinc}(n/3), \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{3} \text{sinc}(n/3) = \begin{cases} 2/3, & n = 0, \\ -(1/3) \text{sinc}(n/3), & n \neq 0. \end{cases}$$

como se representa en la Fig. 2(g).

Evidentemente, $y[n] = h[n]$ pues $x[n] = \delta[n]$, y $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})$, como se representa en las Fig. 2(i)-(j).

Para calcular $y_s(t)$, $Y_s(f)$ se debe reescalar $Y(e^{j\omega})$. Se tiene entonces,

$$\begin{aligned} Y_s(f) &= Y(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{f}{f_s}2\pi} = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/3 \\ 1, & \pi/3 < |\omega| < \pi \end{cases} = \begin{cases} 0, & |\frac{f}{f_s}2\pi| < \pi/3 \\ 1, & \pi/3 < |\frac{f}{f_s}2\pi| < \pi \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & |f| < f_s/6 \\ 1, & f_s/6 < |f| < f_s/2 \end{cases} \end{aligned}$$

que se repite periódicamente cada f_s , como se muestra en la Fig. 2(l). Por otra parte, la señal temporal es

$$y_s(t) = \sum_n y[n] \delta(t - nT).$$

es decir, un tren de impulsos discretos modulados por la señal discreta $y[n]$, tal como se representa en la Fig. 2(k).

Finalmente, para obtener $y_c(t)$ se debe filtrar $y_s(t)$ con el filtro reconstructor ideal con respuesta en frecuencia

$$H_r(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_s/2 \\ 0, & f_s/6 < |f| < f_s/2 \end{cases}$$

graficada en la Fig. 2(n), y cuya respuesta impulsiva es $h_r(t) = \text{sinc}(f_s t)$ [Fig. 2(m)]. Por lo tanto, el espectro $Y_c(f)$ de la señal continua $y_c(t)$ es la cascada de $Y_s(f)$ con $H_r(f)$,

$$Y_c(f) = Y_s(f) H_r(f) = \begin{cases} 1, & f_s/6 < |f| < f_s/2 \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se muestra en la Fig. 2(p), y la señal continua $y_c(t)$ es la convolución entre $y_s(t)$ y $h_r(t)$

$$\begin{aligned} y_c(t) &= y_s(t) * h_r(t) = h_r(t) * \sum_n y[n] \delta(t - nT) = \sum_n y[n] \{h_r(t) * \delta(t - nT)\} = \sum_n y[n] h_r(t - nT) \\ &= \sum_n (\delta[n] - \frac{1}{3} \text{sinc}(n/3)) h_r(t - nT) \end{aligned}$$

como se representa en la Fig. 2(o). Una expresión cerrada para $y_c(t)$ se puede calcular fácilmente antitransformando $Y_c(f)$. Se muestran dos maneras de calcularlo.

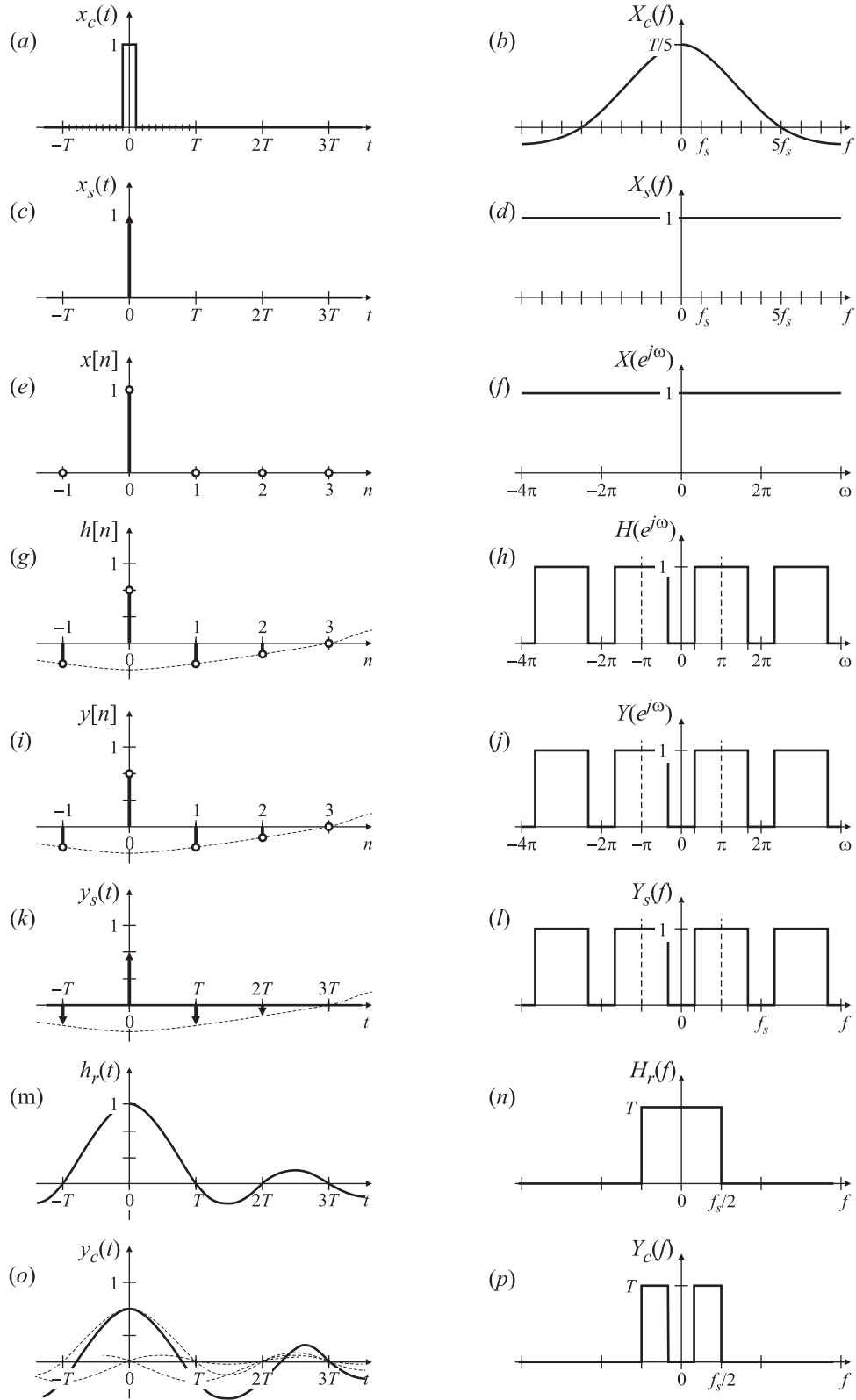


Figura 2: Señales temporales y espectros del inciso (a) del Problema 2.

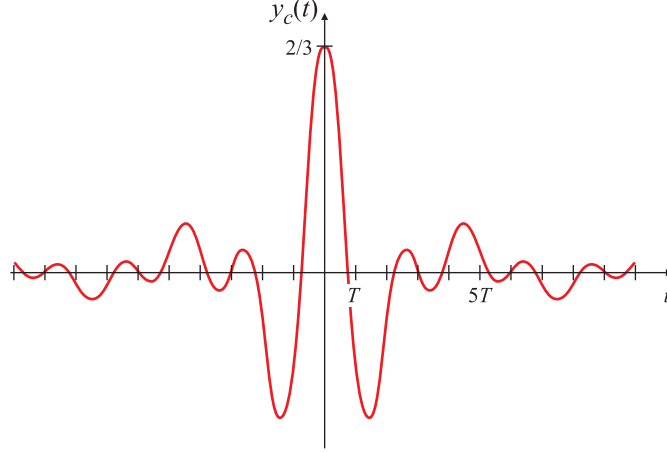


Figura 3: Salida $y_c(t)$ del sistema del Problema 2 ante una entrada $x_c(t) = u(t+T/10) - u(t-T/10)$.

- El espectro $Y_c(f)$ se puede escribir como la diferencia de dos pasabajos de ganancia T , uno con frecuencia de corte en $f_s/2$ y otro con frecuencia de corte en $f_s/6$:

$$Y_c(f) = H_{PB(f_s/2)}(f) - H_{PB(f_s/6)}(f).$$

Como $h_{PBf_s/2}(t) = T \times (2 \times f_s/2) \text{sinc}(f_s t)$, y $h_{PBf_s/6}(t) = T \times (2 \times f_s/6) \text{sinc}(t f_s/3)$, resulta

$$y_c(t) = \text{sinc}(f_s t) - (1/3) \text{sinc}(f_s t/3), \quad (1)$$

que se grafica con más detalles en la Fig. 3.

- El espectro $Y_c(f)$ se puede escribir como

$$Y_c(f) = G(f + f_m) + G(f - f_m) = G(f) * [\delta(f + f_m) + \delta(f - f_m)], \quad (2)$$

donde $G(f)$ está dado por

$$G(f) = \begin{cases} T, & |f| < \Delta f/2 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad \text{con } f_m = \frac{1}{2} \left(\frac{f_s}{6} + \frac{f_s}{2} \right) = \frac{1}{3} f_s, \quad \text{y } \Delta f = \left(\frac{f_s}{2} - \frac{f_s}{6} \right) = \frac{f_s}{3}.$$

como se muestra en la Fig. 4. Entonces, de la ecuación (2), aplicando la propiedad de convolución en frecuencia, se tiene que

$$y_c(t) = g(t) \times 2 \cos(2\pi f_m t)$$

donde $g(t)$ es la respuesta impulsiva del pasabajos definido por $G(f)$, es decir,

$$g(t) = T \times \Delta f \times \text{sinc}(\Delta f t) = T \frac{f_s}{3} \text{sinc}\left(\frac{f_s}{3} t\right) = (1/3) \text{sinc}(f_s t/3).$$

Entonces,

$$y_c(t) = (2/3) \text{sinc}(f_s t/3) \cos(2\pi f_s t/3). \quad (3)$$

La igualdad de las expresiones (1) y (3) se puede comprobar aplicando identidades trigonométricas.

Inciso (b)

En este caso, como $x_c(t) = u(t - T/10) - u(t - 3T/10)$ [Fig. 5(a)], el producto con el tren de impulsos $p_T(t)$ es nulo, porque el pulso no coincide con uno de los instantes de muestreo, que son los t múltiplos de T , $t = nT$. De manera que $x_s(t) = 0$ [Fig. 5(b)], y por lo tanto, $x[n] = 0$ [Fig. 5(c)]. Esto implica que $y[n] = 0$, y por lo tanto $y_s(t) = 0$, y en definitiva, $y_c(t) = 0$.

Inciso (c)

Ante esta entrada el sistema *no* se comporta como un sistema invariante en el tiempo, ya que un corrimiento temporal de la entrada (la señal del inciso (b)) no se corresponde con un corrimiento temporal de la salida. La causa de este comportamiento es que la entrada no es banda limitada, y por lo tanto viola el criterio de Nyquist.

Problema 3

Para este ejemplo es conveniente aplicar la propiedad de desplazamiento en frecuencia. Si $x[n]$ tiene una TDF $X[k]$, la antitransformada de $X[((k - k_0))_N]$ se puede calcular como

$$X[((k - k_0))_N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} ((k - k_0))_N n}.$$

Como $e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$ es N -periódica en k y en n , resulta que $e^{-j \frac{2\pi}{N} ((k - k_0))_N n} = e^{-j \frac{2\pi}{N} (k - k_0) n} = e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$. Entonces

$$X[((k - k_0))_N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} k_0 n} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j \frac{2\pi}{N} k_0 n} x[n] \right) e^{j \frac{2\pi}{N} kn},$$

y esta expresión se puede reconocer como la TDF de la sucesión $e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n} x[n]$. Por lo tanto, se establece el par transformado

$$x[n] e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n} \iff X[((k - k_0))_N].$$

Usando esta propiedad el ejercicio puede resolverse fácilmente. Si

$$Y[k] = \frac{1}{2} X[((k - 1))_N] + X[k] + \frac{1}{2} X[((k + 1))_N]$$

antitransformando término a término se encuentra que

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n} x[n] \Big|_{k_0=1} + x[n] + \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n} x[n] \Big|_{k_0=-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{N} n} + 1 + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi}{N} n} \right) x[n] \\ &= [1 + \cos(\frac{2\pi}{N} n)] x[n]. \end{aligned}$$

La función $w[n] = 1 + \cos(\frac{2\pi}{N} n)$ se suele denominar *ventana temporal*, porque pondera las muestras $x[n]$. Este tipo de operación (con otras ventanas) es habitual en el análisis frecuencial de señales. La ventaja de trabajar en el dominio frecuencia es que, mientras que el “ventaneo” demanda N multiplicaciones, el procesamiento en frecuencia sólo requiere $2N$ sumas, y dos desplazamientos, operaciones que en general demandan menor cantidad de tiempo que las multiplicaciones.

Problema 4

La respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0 \\ -j, & 0 < \omega < \pi, \end{cases}$$

caracteriza un *transformador de Hilbert*.

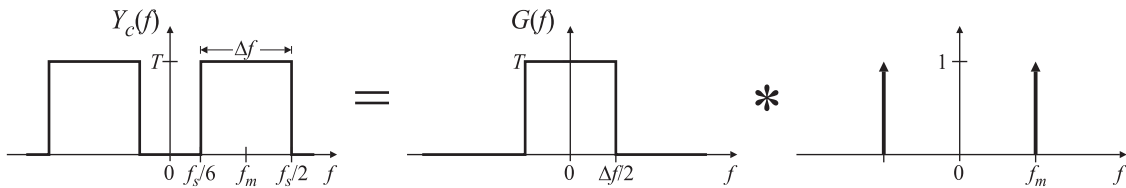


Figura 4: Otra forma de calcular la antitransformada de $Y_c(f)$.

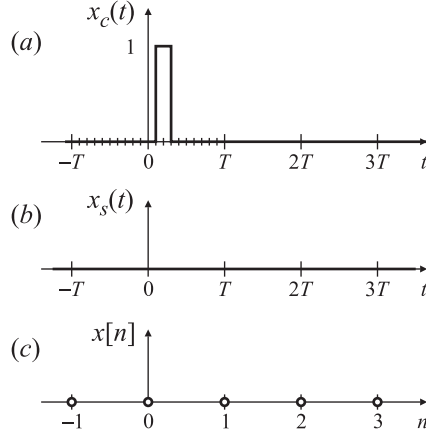


Figura 5: Señal de entrada del inciso (b) de Problema 2.

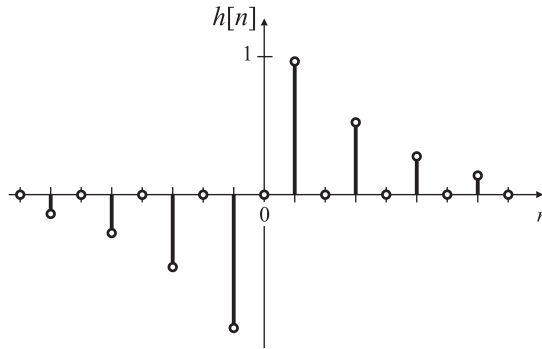


Figura 6: Respuesta impulsiva del transformador de Hilbert.

Inciso (a)

El cálculo de la respuesta impulsiva del transformador de Hilbert es directa:

$$\begin{aligned}
 h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega + \int_0^{\pi} (-j) e^{j\omega n} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi n} (1 - e^{-j\pi n} - e^{j\pi n} + 1) \\
 &= \frac{1}{\pi n} [1 - (-1)^n],
 \end{aligned}$$

si $n \neq 0$, y para $n = 0$

$$h[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 j d\omega + \int_0^{\pi} (-j) d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} (-j\pi + j\pi) = 0.$$

Por lo tanto,

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \text{ o } n \text{ par}, \\ 2/(\pi n), & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Como la transformada $H(e^{j\omega})$ es *imaginaria pura*, la antitransformada $h[n]$ es *impar*. El gráfico de $h[n]$ se muestra en la Fig. 6.

Inciso (b)

Si la entrada es $x[n] = A \cos(\omega_0 n) + B \sin(\omega_1 n)$, con $0 < \omega_0 < \omega_1 < \pi$, la salida $y[n]$ de estado estacionario se puede calcular como

$$y[n] = A |H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_0} \cos(\omega_0 n + \phi_0) + B |H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1} \sin(\omega_1 n + \phi_1),$$

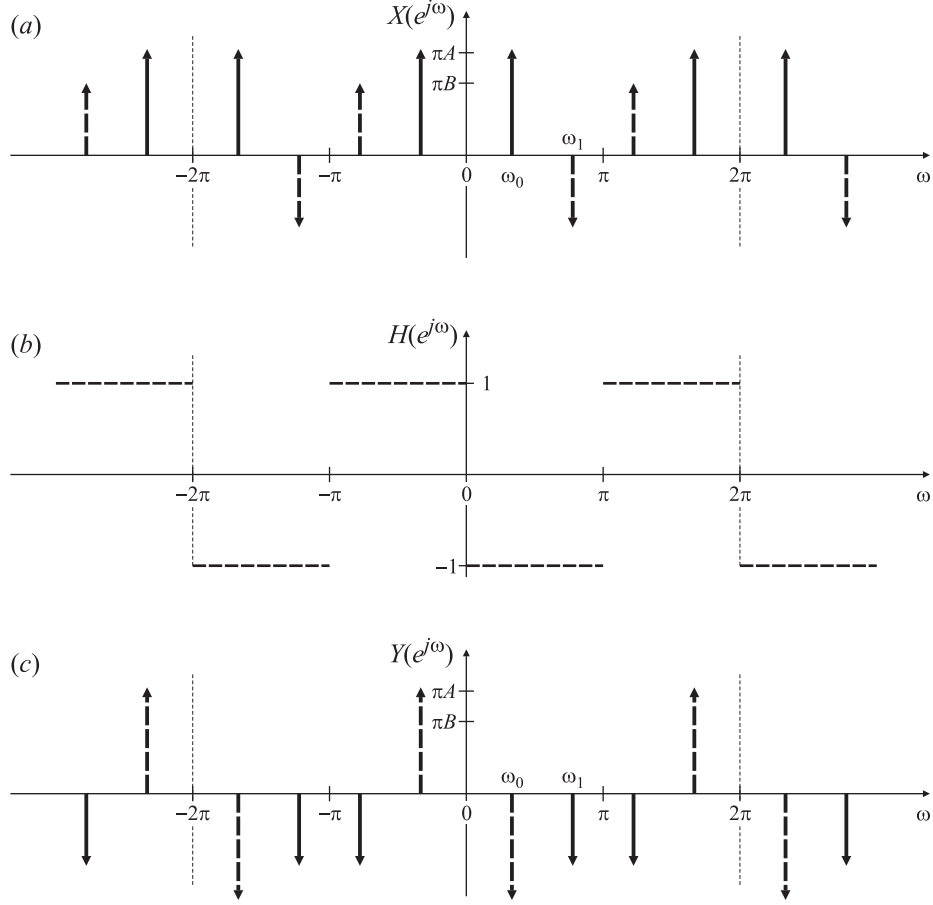


Figura 7: Espectros de las se\u00f1ales del Problema 4. Las l\u00edneas punteadas indican magnitudes complejas.

donde $\phi_i = \arg\{H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_i}\}$. Es claro que

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega),$$

y por lo tanto, $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$ (ver la deducci\u00f3n en los apuntes de teor\u00eda). Entonces:

$$y[n] = A \times 1 \times \cos(\omega_0 n - \pi/2) + B \times 1 \times \sin(\omega_1 n - \pi/2).$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\theta - \pi/2) = \sin \theta$, y que $\sin(\theta - \pi/2) = -\cos \theta$, resulta

$$y[n] = A \sin(\omega_0 n) - B \cos(\omega_1 n)$$

El resultado tambi\u00e9n se puede obtener trabajando directamente en el dominio frecuencia. La entrada $x[n]$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cos(\omega_0 n) + B \sin(\omega_1 n) \\ &= \frac{A}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) + j \frac{B}{2} (-e^{j\omega_1 n} + e^{-j\omega_1 n}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el par transformado $e^{j\omega_0 n} \Leftrightarrow 2\pi \sum_r \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$, se tiene que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_r \pi A [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r)] + j\pi B [-\delta(\omega - \omega_1 + 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_1 + 2\pi r)].$$

Este espectro se representa en la Fig. 7(a) . La salida se puede calcular como

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= \sum_r \pi A H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_i+2\pi r} \delta(\omega-\omega_0+2\pi r) + \pi A H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_i+2\pi r} \delta(\omega+\omega_0+2\pi r) + \\ &\quad \sum_r -j\pi B H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1+2\pi r} \delta(\omega-\omega_1+2\pi r) + j\pi B H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_1+2\pi r} \delta(\omega+\omega_1+2\pi r). \end{aligned}$$

Como $H(e^{j\omega})$ es periódica, $H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_i+2\pi r} = H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_i}$, y entonces

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_r \pi A H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_i} \delta(\omega-\omega_0+2\pi r) + \pi A H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_i} \delta(\omega+\omega_0+2\pi r) + \\ &\quad \sum_r -j\pi B H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1} \delta(\omega-\omega_1+2\pi r) + j\pi B H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_1} \delta(\omega+\omega_1+2\pi r). \end{aligned}$$

De acuerdo con la expresión de la respuesta en frecuencia,

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_i} &= H(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1} = -j \\ H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_i} &= H(e^{j\omega})|_{\omega=-\omega_1} = j \end{aligned}$$

como se muestra en la Fig. 7(b) , se tiene que

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_r -j\pi A \delta(\omega-\omega_0+2\pi r) + j\pi A \delta(\omega+\omega_0+2\pi r) + \\ &\quad \sum_r -j\pi B (-j) \delta(\omega-\omega_1+2\pi r) + j\pi B (j) \delta(\omega+\omega_1+2\pi r) \\ &= \sum_r j\pi A [-\delta(\omega-\omega_0+2\pi r) + \delta(\omega+\omega_0+2\pi r)] + (-\pi B) [\delta(\omega-\omega_1+2\pi r) + \delta(\omega+\omega_1+2\pi r)]. \end{aligned}$$

El espectro de $Y(e^{j\omega})$ se grafica en la Fig. 7(c) . Antitransformando resulta

$$y[n] = j\frac{A}{2} (-e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) - \frac{B}{2} (e^{j\omega_1 n} + e^{-j\omega_1 n})$$

es decir

$$y[n] = A \sin(\omega_0 n) - B \cos(\omega_1 n).$$