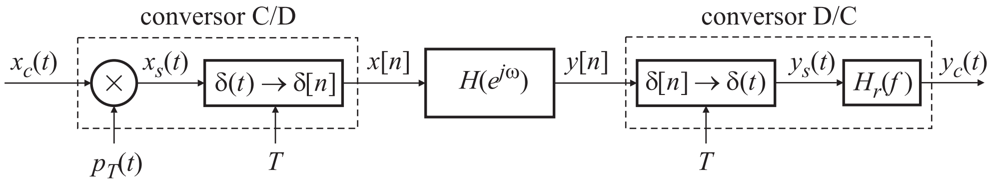
Nombre: ....L.U.: ....

Procesamiento Digital de Señales - Tercer Parcial - 25 de noviembre de 2010

1. La señal $x_c(t) = A\ \mathrm{sinc}(3f_s\, t/2)$ se muestrea cada $t = 1/f_s$, obteniéndose la señal discreta $x[n]$.
   (*a*) Calcule y grafique $X_c(f)$, el espectro de $x_c(t)$.
   (*b*) Calcule y grafique $X_s(f)$, el espectro de $x_s(t)$ (vea la figura).
   (*c*) Calcule y grafique $X(e^{j\omega})$, el espectro de $x[n]$. En todos los casos (*a*)-(*c*) indique las escalas de los gráficos.
   (*d*) Especifique y dibuje la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor $H_r(f)$. ¿Debe implementarse con un filtro analógico, o puede realizarse con un filtro discreto?
   (*e*) Si $H(e^{j\omega}) = 1$ para todo ω, grafique $Y_c(f)$, el espectro de la señal de salida $y_c(t)$.
   (*f*) Calcule explícitamente la expresión temporal de la salida $y_c(t)$.
   (*g*) ¿Es $y_c(t)$ igual a $x_c(t)$? Justifique su respuesta. En caso negativo, sugiera una manera de atenuar este problema, y calcule la expresión temporal de la salida $y_c(t)$ en este caso.
   (*h*) Especifique la forma del filtro reconstructor si en la conversión D/C se utiliza un mantenedor de orden cero, esto es, en lugar del bloque $\delta[n] \to \delta(t)$ se utiliza un bloque $\delta[n] \to u(t) - u(t - T)$. Discuta cómo implementaría este nuevo filtro reconstructor.



2. (*a*) Calcule la transformada Z de la señal $x[n] = A \cos(\omega_0 n)\, u[n]$.
   (*b*) Dada la ecuación a diferencias $y[n] = (1/2)\, y[n-1] + x[n]$, calcule la función de sistema $H(z)$ que sea compatible con la entrada $x[n]$ del inciso (*a*). ¿Cuál es la condición inicial que debe especificarse para la ecuación a diferencias?
   (*c*) Aplicando transformada Z, calcule la salida $y[n]$ del sistema ante la entrada $x[n]$ del inciso (*a*).
   (*d*) Identifique las partes de la respuesta que corresponden a la respuesta transitoria y a la de estado estacionario.
   (*e*) Diseñe un compensador $C(z)$ tipo FIR del menor orden posible que conectado en cascada con $H(z)$ anule la respuesta de estado estacionario para la entrada $x[n]$ del inciso (*a*).

3. La función de sistema de un filtro FIR notch que impide el paso de señales de frecuencia $\pm\omega_0$ es $H(z) = 1 - 2\cos\omega_0\, z^{-1} + z^{-2}$, y su respuesta en frecuencia es $H(e^{j\omega}) = 2\, e^{-j\omega}(\cos\omega - \cos\omega_0)$.
   (*a*) Calcule la respuesta impulsiva.
   (*b*) El filtro, ¿es de fase lineal generalizada (FLG)? En caso afirmativo, indique cuál es el retardo de grupo del sistema.
   (*c*) Esboce el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia, indicando todos los puntos interesantes.
   (*d*) ¿Es posible encontrar un sistema $C(z)$ que conectado en cascada con $H(z)$ lo transforme en un FIR tipo IV (respuesta impulsiva antisimétrica, longitud par)? En caso negativo, justifique. En caso afirmativo, calcule $C(z)$ y encuentre el retardo de grupo de la cascada $H(z)\, C(z)$.

4. $H(z)$ es la función de sistema de un sistema de FLG con ceros únicamente *dentro* y *fuera* del círculo unitario.
   (*a*) Explique la posición y multiplicidad de los polos y los ceros de un sistema de fase mínima $G(z)$ cuya respuesta en frecuencia tenga el mismo módulo que la de $H(z)$.
   (*b*) Repita el inciso anterior para el caso en que $H(z)$ tenga ceros también *sobre* el círculo unitario.

Serie de Fourier (SF)	Transformada de Fourier (TF)	Transf. de Fourier de señales discretas (TFTD)	Transf. Discreta de Fourier (TDF)
$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$	$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
Varios	$\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k = \frac{1-\rho^N}{1-\rho}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$	$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}$	$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega n} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\mathrm{sen}(N\omega/2)}{\mathrm{sen}(\omega/2)}$

dominio frecuencial (Ω)		dominio temporal		dominio frecuencial (f)
$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_k X_c\left[\frac{1}{T_s}(\omega - 2\pi k)\right]$	$\Leftrightarrow$	$x[n] = x_c\left(nT_s\right)$	$\Leftrightarrow$	$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_k X_c\left[\frac{f_s}{2\pi}(\omega - 2\pi k)\right]$
$Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$	$\Leftrightarrow$	$y[n] = x[n] * h[n]$	$\Leftrightarrow$	$Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$
$Y_s(\Omega) = Y(e^{j\omega})\big\|_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega Ts}}$	$\Leftrightarrow$	$y_s(t) = \sum_n y[n]\delta(t - nT_s)$	$\Leftrightarrow$	$Y_s(f) = Y(e^{j\omega})\big\|_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f Ts}}$
$\begin{aligned} Y_r(f) &= H_r(\Omega)Y_s(\Omega) \\ &= T_s H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)\big\|_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega Ts}} \end{aligned}$	$\Leftrightarrow$	$y_r(t) = \sum_n y[n]h_r(t - nT_s)$	$\Leftrightarrow$	$\begin{aligned} Y_r(f) &= H_r(f)Y_s(f) \\ &= T_s\, H\left(e^{j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)\big\|_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f Ts}} \end{aligned}$
$H_c(\Omega) = \begin{cases} H\left(e^{j\omega}\right)\big\|_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega Ts}}, & \text{si } \|\Omega\| < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$				$H_c(f) = \begin{cases} H\left(e^{j\omega}\right)\big\|_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f Ts}}, & \text{si } \|f\| < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T_s}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$

$$z^N = re^{j\theta} \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[N]{r}e^{j\frac{\theta+2\pi k}{N}}, k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Transformada Bilineal: $s = \frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}$, $z = \frac{(2/T+s)}{(2/T-s)}$, $\omega = 2\arctan(\pi f T_d)$, $f = \frac{1}{\pi T_d}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Invariación al impulso: $h[n] = T_d\, h_c(t)\big|_{t=nT_d}$