PRIMER PARCIAL DE MATEMÁTICA ESPECIAL I

28 / 04 / 2023

NOMBRE Y APELLIDO:..

REGISTRO:...

1. (a) Hallar el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{2^n}$.

   (b) Hallar el desarrollo de Taylor, centrado en $x = 0$, de $\ln(x+1)$. Indicar el intervalo de convergencia de dicho desarrollo.

   Observación: *tanto en (a) como en (b), recuerde analizar el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia.*

   (c) Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

   (d) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(x+\lambda)} \cos(x\lambda)dx$ converge uniformemente cuando $\lambda \in [0, +\infty)$.

2. Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y''(x) + 6y'(x) + 8y(x) = 2e^{-2x} + 8x,$$

   con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 2$.

3. (a) Determinar si los siguientes conjuntos de funciones son, o no son, linealmente independientes en el intervalo indicado.

   (i) e^x, e^{-x}, $\cosh(x)$, con $x \in [0, \infty)$. (ii) $\text{sen}(x)$, $\text{sen}^2(x)$, con $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   (b) Suponga que y_1 e y_2 son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0 \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Decidir, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (i) Si $W(y_1, y_2)(0) \neq 0$, entonces y_1 e y_2 constituyen una base para el espacio de soluciones de la ecuación diferencial.

   (ii) Si $W(y_1, y_2)(-5) < 0$, entonces $W(y_1, y_2)(5) < 0$.

   (iii) Si y_1 e y_2 constituyen una base para el espacio de soluciones de la ecuación diferencial, entonces $W(y_1 - y_2, y_2 - y_1)(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Encuentre dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias para la siguiente ecuación diferencial.

$$y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0.$$