Nombre: .... L.U.: ....

Procesamiento Digital de Señales – Examen recuperatorio – 4 de julio de 2012

1. (*a*) Determine y dibuje el espectro $X(f)$ de la señal $x(t)$ que se muestra en la Fig. (*a*),

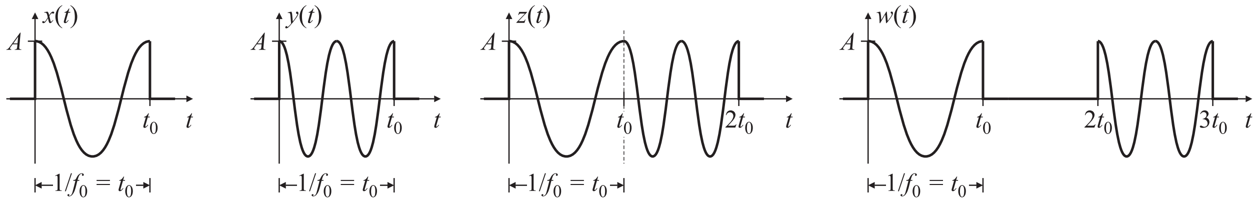
$$x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t), & 0 \le t \le t_0 = 1/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(*b*) Calcule y grafique el espectro $Y(f)$ de la señal $y(t)$ que se muestra en la Fig. (*b*),

$$y(t) = \begin{cases} A\cos[2\pi(2f_0)t], & 0 \le t \le t_0 = 1/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(*c*) A partir de los resultados de los incisos (*a*) y (*b*) grafique el espectro $Z(f)$ de la señal $z(t) = x(t) + y(t - t_0)$ que se muestra en la Fig. (*c*)

(*d*) Discuta las diferencias y similitudes entre el espectro $Z(f)$ de la señal $z(t)$ del inciso anterior, y el expectro $W(f)$ de la señal $w(t) = x(t) + y(t - 2t_0)$ que se muestra en la Fig. (*d*)



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

2. Dada la señal $x[n] = u[n] - u[n-N]$, que se muestra en la Fig. (*a*),

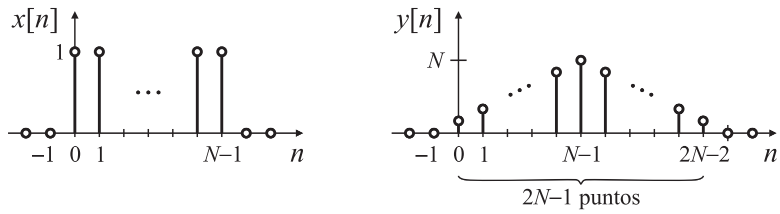
(*a*) Calcule $X_N[k]$, la transformada de Fourier (TDF) de N puntos de $x[n]$.

(*b*) Grafique detalladamente el módulo y la fase de $X_N[k]$.

(*c*) Establezca la relación entre la sucesión $y[n]$ de $2N-1$ puntos de longitud que se muestra en la Fig. (*b*) y $x[n]$ de la Fig. (*a*), y calcule $Y_{2N-1}[k]$ (la TDF de orden $2N-1$ de $y[n]$) a partir de $x[n]$ aplicando propiedades.

(*d*) Grafique detalladamente el módulo y la fase de $Y_{2N-1}[k]$.

(*e*) ¿Es posible calcular $Y_{2N-1}[k]$ a partir de $X_N[k]$? Justifique.



(*a*) (*b*)

3. Para la función de sistema

$$H(z) = \frac{-6 - 2z^{-1} - 6z^{-2} + z^{-4}}{(-3 + z^{-1})(2 + z^{-1})}.$$

(*a*) Dibuje el diagrama de polos e identifique todas las posibles regiones de convergencia.

(*b*) Calcule **todas** las respuestas impulsivas (asociadas a cada una de las regiones de convergencia) y determine si son: (*i*) causales; (*ii*) estables.

(*c*) Para las sucesiones causales del inciso anterior aplique el teorema del valor inicial, y verifique el valor de $h[0]$.

4. La figura muestra un sistema para procesamiento discreto de señales continuas. Se desea que el sistema se comporte como un filtro Notch para la frecuencia $f_N = f_s/8 = 1/(8T_s)$.

(*a*) Encuentre los sistemas discretos $H_1(z)$ y $H_2(z)$ que se comporten como Notch (con ganancia unitaria en DC) tal que:

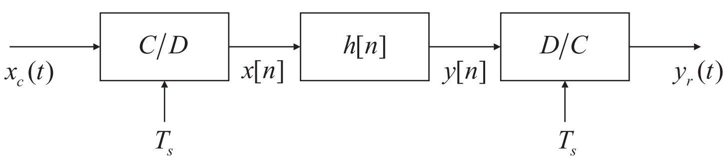
(*i*) $H_1(z)$ tenga fase lineal generalizada

(*ii*) $H_2(z)$ sea un filtro IIR de segundo orden con ceros complejos.

(*b*) Dibuje el diagrama de polos y ceros para $H_1(z)$ y $H_2(z)$

(*c*) Calcule la función transferencia $H_1(e^{j\omega})$. Como el sistema es de FLG, exprese $H_1(e^{j\omega})$ como $H_1(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j(\alpha\omega+\beta)}$ y encuentre $A(\omega)$, α y β.

(*d*) Dibuje el **módulo** y la **fase** de la respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\omega})$, indicando los puntos relevantes.



Serie de Fourier (SF)	Transformada de Fourier (TF)	Transf. de Fourier de señales discretas (TFTD)	Transf. Discreta de Fourier (TDF)
$\tilde{x}(t)=\sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$	$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt$	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$	$X(e^{j\omega})=\sum_n x[n]e^{-j\omega n}$	$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
Varios	$\sum_{k=0}^{N-1}\rho^k=\frac{1-\rho^N}{1-\rho}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k=\frac{1}{1-\rho}$	$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}$	$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega n}=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\frac{\mathrm{sen}(N\omega/2)}{\mathrm{sen}(\omega/2)}$

dominio frecuencial (Ω)		dominio temporal		dominio frecuencial (f)
$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_k X_c\left[\frac{1}{T_s}(\omega-2\pi k)\right]$	$\Leftrightarrow$	$x[n]=x_c(nT_s)$	$\Leftrightarrow$	$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_k X_c\left[\frac{f_s}{2\pi}(\omega-2\pi k)\right]$
$Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$	$\Leftrightarrow$	$y[n]=x[n]*h[n]$	$\Leftrightarrow$	$Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$
$Y_s(\Omega)=Y(e^{j\omega})\Big\vert_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s}\\=\Omega Ts}}$	$\Leftrightarrow$	$y_s(t)=\sum_n y[n]\delta(t-nT_s)$	$\Leftrightarrow$	$Y_s(f)=Y(e^{j\omega})\Big\vert_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s}\\=2\pi fTs}}$
$\begin{aligned}Y_r(f)&=H_r(\Omega)Y_s(\Omega)\\&=T_sH\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)\Big\vert_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s}\\=\Omega Ts}}\end{aligned}$	$\Leftrightarrow$	$y_r(t)=\sum_n y[n]h_r(t-nT_s)$	$\Leftrightarrow$	$\begin{aligned}Y_r(f)&=H_r(f)Y_s(f)\\&=T_s\,H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)\Big\vert_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s}\\=2\pi fTs}}\end{aligned}$
$H_c(\Omega)=\begin{cases}H\left(e^{j\omega}\right)\Big\vert_{\substack{\omega=\Omega\frac{2\pi}{\Omega_s}\\=\Omega Ts}}, & \text{si } \lvert\Omega\rvert<\frac{\Omega_s}{2}=\frac{\pi}{T_s},\\0, & \text{caso contrario.}\end{cases}$				$H_c(f)=\begin{cases}H\left(e^{j\omega}\right)\Big\vert_{\substack{\omega=f\frac{2\pi}{f_s}\\=2\pi fTs}}, & \text{si } \lvert f\rvert<\frac{f_s}{2}=\frac{1}{2T_s},\\0, & \text{caso contrario.}\end{cases}$

$$z^N=re^{j\theta}\quad\Rightarrow\quad z_k=\sqrt[N]{r}e^{j\frac{\theta+2\pi k}{N}},\ k=0,1,\ldots,N-1$$

Transformada Bilineal:	$s=\frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}$, $z=\frac{(2/T+s)}{(2/T-s)}$, $\omega=2\arctan(\pi fT_d)$, $f=\frac{1}{\pi T_d}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
Invariación al impulso:	$h[n]=T_d\,h_c(t)\big\vert_{t=nT_d}$