EXÁMEN FINAL/ COLOQUIO OPTATIVO ANÁLISIS MATEMÁTICO I 03–07–2023

APELLIDOS Y NOMBRES :	*D.N.I. N* $\stackrel{\circ}{=}$:
CARRERA :	*L.U. N* $\stackrel{\circ}{=}$:

1. ♣ © $\boxed{f(x) = (2 - \cos(2x))^{\frac{1}{\sin x}}}$. Determine el **Dominio** $f(x)$.

   Calcule $\lim\limits_{x\to 0} (2 - \cos(2x))^{\frac{1}{\sin x}}$, $\lim\limits_{x\to \pi} (2 - \cos(2x))^{\frac{1}{\sin x}}$.
   Extienda, si es posible, **el dominio de continuidad** de $f(x)$.
   Explicite, si es posible, **un intervalo** en el que se verifiquen las hipótesis del **Teorema de Bolzano-Weierstrass** para $y = f(x)$. Justifique su elección.

---

2. ♣ © Realice el **estudio completo** de $\boxed{x^2 = y^2(1 - y^2)}$. **Grafique**.

---

3. ♣ © $\boxed{f(x) = (2 - \cos(2x))^{\frac{1}{\sin x}}, \quad x \in [\pi + 0{,}001, \pi + 0{,}01]}$. **Calcule** $f'(x)$. Aplique, si es posible, el **Teorema de Lagrange**. Justifique su respuesta.

---

4. ♣ © **Verifique** e **interpre gráficamente** el **Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral**

   a) $\boxed{f(x) = x - [x], \quad x \in [-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]}$.

   b) $\boxed{f(x) = |x - [x]|, \quad x \in [-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]}$.

---

5. ♣ © Sea $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad a = 0}$. Determine el **polinomio de Taylor de orden** $n = 3$, i.e. en (1) el caso $(T_{3,0}f)(x)$. Halle una expresión del **error cometido**. **Aproxime** $f(x)$ en $x = 0{,}01$. **Determine una cota del error** en la aproximación $(T_{3,0}f)(x)$.

$$\boxed{(T_{n,a}f)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n} \tag{1}$$

---

6. ♣© Considerando el **gráfico** de $\boxed{x^2 = y^2(1 - y^2)}$ obtenido al resolver el inciso 2:

   a) **Plantee una integral definida** que permite determinar la **longitud** **del lóbulo superior**.

   b) **Plantee una integral** que permite determinar el **área** encerrada en **ambos lóbulos**.

   c) **Plantee una integral definida** que determine el **volúmen de revolución** al girar alrededor de $y = 0$ la mitad del lóbulo superior.

   d) **Plantee una integral definida** que determine la **superficie de revolución** al girar alrededor de $x = 0$ la mitad **del lóbulo** inferior.

---

7. ♣ © Who is who ?: $x^2 = y^2(1 - y^2)$ vs $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$ son parametrizables por (2) y/ó (3), Figura 1. Justifique su respuesta. Ilustre los recorridos (2) y (3).

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{-(1-\tan^4\theta)}{\tan^4\theta}}\,\cos\theta \\ y = \sqrt{\dfrac{-(1-\tan^4\theta)}{\tan^4\theta}}\,\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0,\, 2\pi)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)}}\,\cos\theta \\ y = \sqrt{\dfrac{(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)}}\,\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0,\, 2\pi)$$

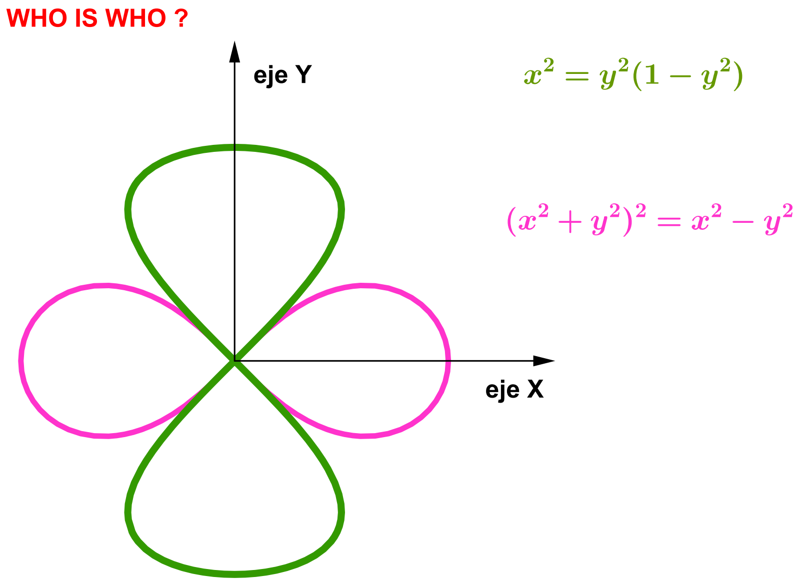

Figura 1: Parametrizaciones (2) − (3) vs $\boldsymbol{x^2 = y^2(1-y^2)}$ −− $\boldsymbol{(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)}$.

$$\boxed{\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{-(1-\tan^4\theta)}{\tan^4\theta}}\,\cos\theta \\ y = \sqrt{\dfrac{-(1-\tan^4\theta)}{\tan^4\theta}}\,\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0,\, 2\pi)} \tag{2}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)}}\,\cos\theta \\ y = \sqrt{\dfrac{(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)}}\,\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0,\, 2\pi)} \tag{3}$$

8. ♣ © **Identifique** las curvas planas definidas por las siguientes **representaciones polares**, si es posible con alguna de las **expresiones cartesianas implícitas enmarcadas**.
$r(\theta) = \sin(\theta)$, $r(\theta) = \dfrac{1}{\sin(\theta)}$, $r(\theta) = \cos(2\theta)$, $r(\theta) = \dfrac{1}{\cos(2\theta)}$, $r^2(\theta) = \cos(2\theta)$, e $r^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos(2\theta)}$. **Grafíquelas.**

$\sqrt{x^2+y^2} = x^2 - y^2$	$x^2+y^2-y=0$	$y-1=0$	$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$	$(x^2+y^2)^{3/2} = x^2-y^2$
$x^2-y^2=1$				

---

9. ♣ © **Identifique las curvas planas** de representación polar $r(\theta) = f(\theta) = \dfrac{d}{\cos(\theta-\theta_*)}$, $d > 0$ y $0 < \theta_* < \frac{\pi}{2}$. **Determine las ecuaciones cartesianas** con $d = 1$ de los casos $\theta_* = 0$, $\theta_* = \pi/6$, $\theta_* = \pi/4$, $\theta_* = \pi/3$ y $\theta_* = \pi/2$. **Grafíquelas. Interprete geométricamente** la constante $d > 0$ y el ángulo θ_*.
