EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS I

1. *a*) Demostrar que si una función es derivable en un punto $x = a$ entonces es continua en ese punto.

   b) Los márgenes superior e inferior de un poster miden $6cm$, y los márgenes laterales miden $4cm$. Si el área impresa del poster se fija en $384cm^2$, determine la dimensiones del poster cuya área sea la mínima. Justifique claramente la respuesta.

2. *a*) Enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo. Demostrar la Regla de Barrow.

   b) **Plantear** la integral que permite encontrar el volumen del sólido cuya base es la región acotada por las rectas $y = 1 - \frac{x}{2}$, $y = 1 + \frac{x}{2}$ y $y = 0$, y cuyas secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados.

   c) Evaluar

   1) $\displaystyle\int x \sec^2 x dx.$ 2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4}.$

3. *a*) Elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva $x = -1 + 3 \operatorname{sen} t$, $y = 2 + 3\cos t$, $0 \le t \le \pi$. Trace la curva e indique con una flecha la dirección.

   b) Hallar la ecuación cartesiana de la curva $r = 4\cos\theta$ dada en coordenadas polares.

4. *a*) Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes, justificando la respuesta en cada caso. Si utiliza algún teorema o criterio para analizar la serie, enunciarlo con claridad.

   1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2},$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)3^n}{n!}.$

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta en cada caso.

   a) La sucesión $\left\{(-1)^n \dfrac{n+1}{e^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente.

   b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, no es derivable en $x = 0$.

   c) La ecuación $\ln x = -x^2$ tiene, al menos, una solución real.