ELEMENTOS DE ÁLGEBRA Y DE GEOMETRÍA — PARCIAL 4	02 - 05 - 2020 Tema 1
APELLIDO Y NOMBRE:	NOTA 94
E-MAIL:	REG. N°:

1. (a) Utilizando el método de eliminación de Gauss, hallar todos los valores de x, y y z de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Si A, B y C son matrices de orden n, decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

(a) $(AC^TB - A^2B)^T = A^T(C - A^T)B^T$

(b) Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ ó $B = 0$.

25

2. (a) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\det(B) = 2$, con $B \in M_4(\mathbb{R})$ calcular $\det\left(\frac{1}{2}AB^{-1}\right)$ y $\det(B^2A^T)$.

14

(b) Decidir si $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz inversible.

3. Sean los vectores libres: $\vec{u} = (2, 1, 4), \vec{v} = (3, 3, 1), \vec{w} = (1, -1, 1)$. Suponiendo que todos se originan en el punto (1,1,-1)

(a) Hallar las coordenadas de los extremos de $\vec{v}$.

(b) Hallar los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $2\,\vec{v}$.

(c) Hallar la superficie de la cara generada por $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

20 (d) Hallar el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores.

4. Sabiendo que $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 7$, $||\vec{w}|| = 3$, $proy_{\vec{v}}\vec{u} = 4$ $ang(\vec{u}, \vec{w}) = \pi/3$ y que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{w}$, calcular $(3\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{w})$.

30

(♡) Si sabemos que $|A| = -5$ y $|B| = 3$, ¿Podemos afirmar que $|A.B| = -15$?

Bb

Nro. de hojas entregadas, incluyendo la del enunciado: 4 **Firmar la última hoja.**

HOJA Nº 1

(1-4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-2y+z=-4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} -2F_1+F_2 \to \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} -2 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -3 & -3 & -3 \end{array} \to F_2$$

$$\begin{array}{l} -F_1+F_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ \hline 0 & -3 & 0 & -6 \end{array} F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} -F_2+F_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \to F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -3y-3z=-3 \\ 3z=-3 \end{cases}$$

① $3z=-3$

$\boxed{z=-1}$

② $-3y-3\cdot(-1)=-3$

$-3y+3=-3$

$-3y=-3-3$

$y=\frac{-6}{-3}$

$\boxed{y=2}$

③ $x+y+z=2$

$x+2-1=2$

$x+1=2$

$x=2-1$

$\boxed{x=1}$

SOL: $(1,2,-1)$

EL SISTEMA ES COMPATIBLE DETERMINADO.

(1-B) (A) $(AC^TB - A^2B)^T = A^T(C-A^T)B^T$ ⇒ LA AFIRMACIÓN ES FALSA.

$(AC^TB - A^2B)^T = B^TCA^T - B^T(A^2)^T$

$= B^TCA^T - B^TA^TA^T$

$= [B^T(CA^T - A^TA^T)]$

$= [B^T(C-A^T)A^T]$

$= B^T(C-A^T)A^T \neq A^T(C-A^T)B^T$

(B) SI $AB=0$, ENTONCES $A=0$ ó $B=0$. ⇒ LA AFIRMACIÓN ES FALSA.

VEAMOS UN EJEMPLO. SEAN A, B MATRICES DE ORDEN 2.

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1+1.0 & 0.0+1.0\\ 0.1+0.0 & 0.0+0.0\end{pmatrix}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

(2) $$A=\begin{pmatrix}0&-1&2&1\\1&4&0&1\\0&0&3&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \qquad |B|=2,\ B\in M_4(\mathbb{R})$$

$$\det(A)=1.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&2&1\\0&3&0\\0&0&-1\end{vmatrix}$$

$\det(A) = -1.((-1).3.(-1))$

$= -1.3$

$\det(A) = \boxed{-3}$

CALCULAR $\left|\frac{1}{2}AB^{-1}\right|$

$\left|\frac{1}{2}AB^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3|AB^{-1}|$

$= \frac{1}{2}|A|.|B^{-1}|$

$= \frac{1}{2}|A|.|B|^{-1}$

$= \frac{1}{2}.(-3).2^{-1}$

$= \frac{1}{2}.(-3).\frac{1}{2}$

$= \boxed{-\frac{3}{4}}$

PROPIEDADES: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; $|A^n| = |A|^n$

CALCULAR $|B^3 A^{-1}|$

$|B^3 A^{-1}| = |B^3| \cdot |A^{-1}|$

$= |B|^3 \cdot |A|$

$= (8)|B| \cdot |A|$

$= 16 \cdot 2 \cdot (-3)$

$|B^3 A^{-1}| = \boxed{-96}$

④ DECIDE SI $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ES UNA MATRIZ INVERSIBLE.

VEAMOS EL DETERMINANTE DE C:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$|C| = (0+0+(-1)) - (0+0+6)$

$= -1 - 6$

$|C| = -7$

EL DETERMINANTE DE C ES DISTINTO DE CERO. POR ENDE, C ES INVERSIBLE.

⑤ VECTORES LIBRES: $\vec{u} = (2,1,4)$, $\vec{v} = (3,3,1)$, $\vec{w} = (1,-1,1)$ Y SUPONIENDO QUE SE ORIGINAN EN EL PUNTO $(1,1,-1)$.

① HALLAR LAS COORDENADAS DE LOS EXTREMOS DE $\vec{v}$.

$\vec{v} = \vec{OE}$ $\quad \vec{v} = E - O \quad \Rightarrow (3,3,1) = E - (1,1,-1)$

$\vec{v} = (3,3,1)$ $\quad (3,3,1) + (1,1,-1) = E$

$(4,4,0) = E \Rightarrow$ COORDENADAS DEL EXTREMO DE $\vec{v}$.

Ⓑ HALLAR LOS VECTORES $\vec{u}+\vec{v}$, $2\vec{v}$.

$\vec{u}+\vec{v} = (2,1,4)+(3,3,1)$
$\vec{u}+\vec{v} = (5,4,5)$

$2\vec{v} = 2.(3,3,1)$
$2\vec{v} = (6,6,2)$

Ⓒ HALLAR LA SUPERFICIE DE LA CARA GENERADA POR $\vec{u}$ Y $\vec{w}$.

$A = \|\vec{u} \wedge \vec{w}\|$

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1.1-4.(-1), -(2.1-4.1), (2.(-1)-(1.1)))$$

$\vec{u} \wedge \vec{w} = (5, 2, -3)$

$A = \|\vec{u} \wedge \vec{w}\|$

$\|\vec{u} \wedge \vec{w}\| = \sqrt{5^2+2^2+(-3)^2}$
$= \sqrt{25+4+9}$
$A = \sqrt{38}\ um^2$

Ⓓ DATOS: $*\|\vec{u}\|=2$ $*\|\vec{v}\|=7$ $*\|\vec{w}\|=3$ $*\text{PROY}_{\vec{v}}\vec{u}=4$
$*\text{ang}(\vec{u},\vec{w})=\frac{\pi}{3}$ $*\langle\vec{v},\vec{w}\rangle=0$

$\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|}=4 \Rightarrow \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{7}=4$

CALCULAR $(3\vec{u}+2\vec{v}, \vec{u}-\vec{w})$.

$(3\vec{u}+2\vec{v}, \vec{u}-\vec{w}) = (3\vec{u},\vec{u})+(3\vec{u},-\vec{w})+(2\vec{v},\vec{u})+(2\vec{v},-\vec{w})$
$= 3\|\vec{u}\|^2.\cos(0)-3(\vec{u},\vec{w})+2(\vec{v},\vec{u})-2(\vec{v},\vec{w})$
$= 3.2^2.\cos(0)-3(\vec{u},\vec{w})+2(\vec{v},\vec{u})-2.0$
$= 12.\cos(0)-3(\vec{u},\vec{w})+2(\vec{v},\vec{u})$
$= 12.\cos(0)-3.(3)+2.28$
$= 12.\cos(0)-9+56$
$= 12.1+47 = \boxed{59}$

$\boxed{(3\vec{u}+2\vec{v}, \vec{u}-\vec{w}) = 59}$

$\text{PROY}_{\vec{v}}\vec{u}=4 \Rightarrow \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{7}=4 \Rightarrow \langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 7.4 \Rightarrow \boxed{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 28}$

$\langle\vec{u},\vec{w}\rangle = \|\vec{u}\|.\|\vec{w}\|.\cos\frac{\pi}{3}$
$= 2.3.\frac{1}{2}$

$\boxed{\langle\vec{u},\vec{w}\rangle = 3}$