Final de Matemática Avanzada. 29/12/2020

APELLIDO Y NOMBRES: **REGISTRO:**

1. a) Hallar la región donde $f(z) = sen\, z + z^2$ es diferenciable compleja, siendo $sen\, z = sen\, x ch\, y + i cos\, x sh\, y$.

   b) Teniendo en cuenta el inciso anterior, hallar la conjugada armónica de $u(x,y) = sen\, x ch\, y + x^2 - y^2$.

2. a) Hallar la imagen por $w = f(z) = z^2$ de rectas paralelas al eje y.

   b) Dada $w = \dfrac{i(1-z)}{1+z}$, $z = x + iy$,

      i) hallar la imagen por w de la recta $y = 2$;

      ii) ¿de qué región del plano z es imagen por $\dfrac{i(1-z)}{1+z}$ el disco $|w| < 1$?

3. a) Calcular las siguientes integrales:

      i) $\displaystyle\int_C \frac{sen\, z}{2z+\pi} dz$, C el cuadrado de vértices: $2, 2i, -2$ y $-2i$

      ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\, dz}{(z^2-1)(z^2+1)}$, $\gamma(t) = \frac{i}{2} + \frac{3}{4}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

      iii) $\displaystyle\int_\gamma z^3 ch(1/z) dz$.

      iv) $\displaystyle\int_{|z|=1} \overline{z} dz$.

   b) indicar, gráfica o analíticamente una curva γ para la cual $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^4-1} dz = 0$. Justificar.

4. a) Dada $f(z) = \dfrac{1}{z-3} + \dfrac{1}{z+i}$, elegir un punto z_0 y efectuar su desarrollo de Taylor centrado en z_0 indicando la región de validez de ese desarrollo; justificar.

   b) Dar un ejemplo de una función que tenga un polo de orden 3 en $z = 2$ y una singularidad esencial en $z = 0$.

5. a) Hallar el desarrollo de Fourier de la siguiente función periódica de período 2π:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < -\pi/2 \\ 0, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}.$$

   b) Usando el desarrollo obtenido en a), calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.