



Parcial 5

Física II - IC (Universidad Nacional del Sur)

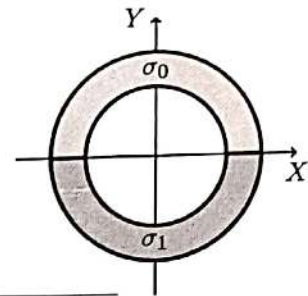


Escanea para abrir en Studocu

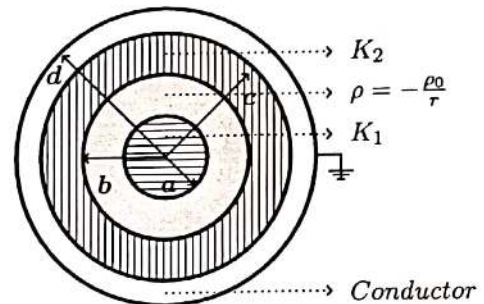
1er Parcial

Problema 1. Se tiene una arandela de radio interior a y radio exterior b , cargada con dos densidades superficiales diferentes $\sigma_0 = \sigma_A \cos \phi$ para la región $y > 0$ y $\sigma_1 = \text{constante}$ para $y < 0$, siendo $\sigma_1 > 0$. Calcule:

- La carga total de la arandela.
- El vector campo eléctrico en el punto central de la arandela (P).

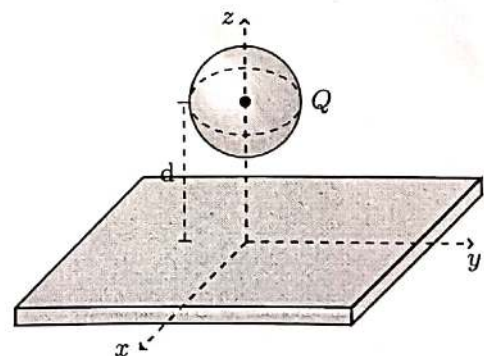


Problema 2. Se tiene el sistema que se representa en la figura. El mismo está compuesto por un cilindro dieléctrico de radio a y longitud L cuya constante dieléctrica es K_1 . El cilindro está rodeado por una distribución de carga volumétrica $\rho(r) = -\frac{\rho_0}{r}$ ($\rho_0 > 0$) que se extiende desde el radio a hasta el radio b . A su vez, esta distribución se encuentra rodeada por un cascarón cilíndrico de dieléctrico K_2 ($K_2 > K_1$) de radio interno b y radio externo c . Finalmente todo el arreglo se encuentra rodeado por un cascarón conductor de radio interno c y externo d el cual se encuentra conectada a tierra.



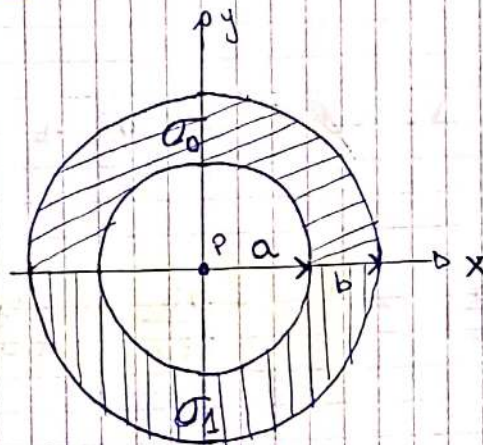
- Calcule el vector campo eléctrico para todo el espacio. Justifique adecuadamente las leyes que utilizará para resolver el problema, indicando la superficie Gaussiana que empleará y por qué. Grafique el campo eléctrico para todo r . Grafique la polarización para todo r .
- Calcule las densidades de carga de polarización y la carga neta de polarización. Dibuje las líneas de campo eléctrico generado únicamente por las cargas de polarización.
- Calcule el potencial eléctrico como función de r . Considere como punto de referencia al conductor, $V(r = d) = 0$.
- Indique cuáles son las densidades de carga en la superficie interna y externa de la superficie conductora. Justifique.
- Considere que el conductor está conectado a un potencial $V_1 > 0$ en lugar de estar conectado a tierra. Esquematice las líneas de campo eléctrico de todo el arreglo.

Problema 3. Se tiene un plano conductor infinito en el plano definido por los ejes X e Y . El mismo tiene una carga neta igual a cero. Suponga que se acerca un cascarón esférico de radio R con una carga Q distribuida uniformemente en toda su superficie. El mismo se encuentra a una distancia $d > R$ como se muestra en la figura. Si la densidad inducida por la carga Q sobre la cara superior del plano es $\sigma(r) = -\frac{\sigma_0}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$, donde r es la coordenada polar sobre el plano $\langle XY \rangle$:



- Realice un dibujo de las líneas de campo sobre el plano $\langle YZ \rangle$ del arreglo plano-esfera para la región externa a la esfera por encima y por debajo del plano conductor.
- Encuentre el valor de la constante σ_0 .
- Encuentre el campo eléctrico generado por todo el arreglo en el centro de la esfera.
- Encuentre el campo eléctrico para regiones donde $z < 0$, es decir por debajo del plano conductor. Desprecie los efectos de borde y considere que el plano tiene un área A .

Problema N° 1:



Para los $y > 0$

$$\sigma = \sigma_A \cos \phi$$

Para los $y < 0$

$$\sigma_1 = \text{de } > 0$$

② La carga total de la armadura:

$$\sigma = \frac{dQ}{ds} \rightarrow \int dQ = \int \sigma ds$$

$$Q_{\text{total}} = \int_0^\pi \int_a^b \sigma_A \cos \phi r dr d\phi + \int_\pi^{2\pi} \int_a^b \sigma_1 r dr d\phi$$

$$Q_{\text{total}} = \sigma_A \int_0^\pi \cos \phi \cdot \int_a^b r dr + \left[\sigma_1 (2\pi - \pi) \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] \right]$$

$$\therefore Q_{\text{total}} = \sigma_1 \pi \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right]$$

③ $P \Rightarrow$ Ley de Coulomb $E = \int K \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= (b, 0, 0) \\ \vec{r}' &= (r \cos \phi, r \sin \phi, 0) \end{aligned} \right\} (\vec{r} - \vec{r}') = (-r \cos \phi, -r \sin \phi, 0)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2} = r$$

$$\Rightarrow E_0 = \int_0^\pi \int_a^b K \frac{\sigma_a \cos \phi}{r^2} (-r \cos \phi, -r \sin \phi, 0)$$

$$\hat{C} = K \sigma_A \int_0^\pi \int_a^b -\frac{\cos^2 \phi}{r^2} d\tau d\phi = -K \sigma_A \frac{\pi}{2} \ln(b) - \ln(a)$$

$$= -\frac{\sigma_A \pi}{8\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow \hat{C} = -\frac{\sigma_A}{8\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \checkmark$$

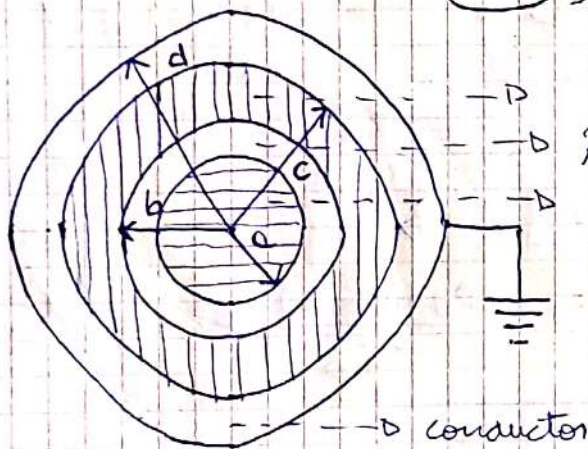
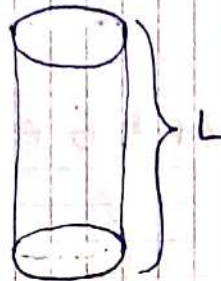
NOTA

Problema N° 2:

Cilindro Dieléctrico:

$r = a$ y long "L"

$$0 < r < a$$



$$P = -\frac{P_0}{r}$$

Labels K_2 and K_1 are placed near the boundaries of the middle and outer regions respectively.

2) - varias superficies de Gauss cilíndricas, para contener todos los cargos y que

$$\vec{E} = E \hat{e}_r$$

- Como hay dieléctricos usamos la ley generalizada, ya que la ley de Gauss no sirve al haber cargos de polarización.

$$r < a$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{libre}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \vec{D} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{D}_A = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \text{ y } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

luego

$$\vec{E} = 0$$

✓

• $0 < r < a$:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}} \rightarrow Q_{\text{libre}} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_a^r \frac{-P_0}{r} r dr d\phi dz$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L D r dz d\phi = \boxed{Q_{\text{libre}} = 2\pi L (-P_0 (r-a))}$$

$$2\pi L D r = 2\pi L (-P_0 (r-a))$$

$$\boxed{D = \frac{-P_0 (r-a)}{r} e_r^{\uparrow} \checkmark}$$

• como no hay dieléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{-P_0 (r-a)}{r \epsilon_0} e_r^{\uparrow} \checkmark}$$

• $b < r < c$:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \vec{D} r dz d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_a^b \frac{-P_0}{r} r dr dz d\phi$$

$$\therefore \boxed{D = \frac{-P_0 (b-a)}{r} e_r^{\uparrow} \checkmark}$$

como hay dieléctrico

$$D = \epsilon_0 K_2 \vec{E} \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{-P_0 (b-a)}{\epsilon_0 K_2 r} e_r^{\uparrow} \checkmark}$$

• $a < r < b$:

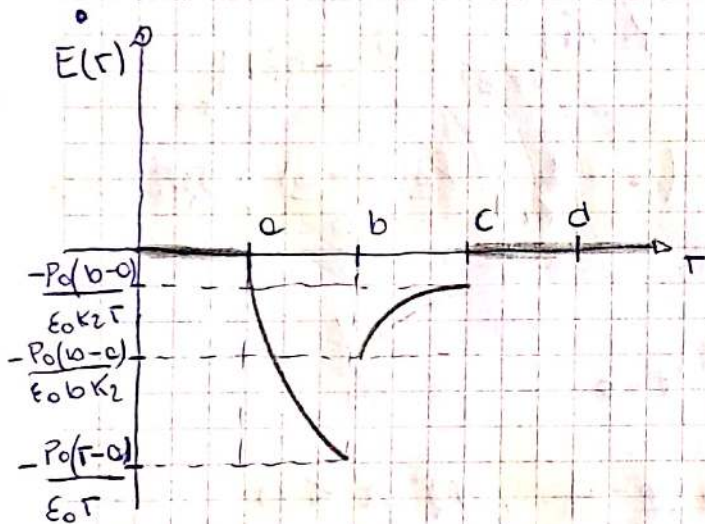
$\vec{E} = 0$

(por las propiedades de los conductores). ✓

• $r > b$:

$\vec{E} = 0$

(porque los cargas inducidas en la cara externa del conductor se van por la puesta a tierra) ✓



- Para la polarización, solo existe cuando hay dieléctrico, y éste esté polarizado:

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

• Como en el dieléctrico (K_1) , $\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{P} = 0$ en $r < a$.

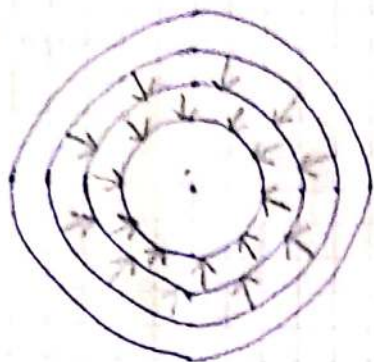
• En el dieléctrico $b < r < c$, (K_2) $\vec{E} = \frac{-P_0(b-a)}{r \epsilon_0 K_2} \rightarrow \vec{P} = (\epsilon_0 K_2 - \epsilon_0) \vec{E}$

$$\vec{P} = -(\epsilon_0 K_2 - \epsilon_0) \frac{P_0(b-a)}{r \epsilon_0 K_2}$$

$$\vec{P} = -(K_2 - 1) \frac{P_0(b-a)}{r K_2}$$

(como $\vec{P}$ es negativo el $\vec{E}$ es entrante) ✓

$$= -\left(1 - \frac{1}{K_2}\right) \left(\frac{P_0(b-a)}{r}\right)$$

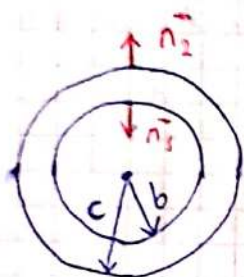


(mayor densidad de líneas de campo en $a < r < b$)

✓

(b)

Busquemos lo $\sigma_p = P \cdot \vec{n} \big|_r =$ (solo en $b < r < c$, que es donde $\neq \vec{P}$)



$$\sigma_{p \text{ int}} = \vec{P} \cdot \vec{n}_1 \big|_{r=b} = \vec{P} \cdot (-\hat{e}_r) \big|_{r=b}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{K_2} \right) \frac{P_0(b-a)}{b}; \sigma_{p \text{ int}} > 0$$

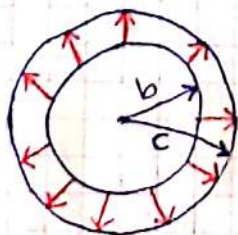
$$\sigma_{p \text{ ext}} = \vec{P} \cdot \vec{n}_2 \big|_{r=c} = \vec{P} \cdot (\hat{e}_r) \big|_{r=c}$$

✓

$$= -\left(1 - \frac{1}{K_2} \right) \frac{P_0(b-a)}{c}; \sigma_{p \text{ ext}} < 0$$

Como $\sigma_{p \text{ int}} > 0$ y $\sigma_{p \text{ ext}} < 0$, las líneas de campo generadas por los cargas de polarización, serán salientes (solo en $b < r < c$)

$$\therefore P_p = 0 \quad \text{y} \quad Q_p = 0$$



Debido a esto es el salto en $\vec{E}$ y por eso la menor cantidad de líneas de campo para $b < r < c$.

✓

©

$$V(r) = ?$$

Considero $V(c) = 0$

$$V(r) - \cancel{V(c)}^0 = \int_c^r - \frac{\rho_0 (b-a)}{\epsilon_0 k_2 r} dr$$

$$V(r) = - \frac{\rho_0 (b-a)}{\epsilon_0 k_2} \int_c^r \frac{1}{r} dr$$

$$V(r) = - \frac{\rho_0 (b-a)}{\epsilon_0 k_2} \ln\left(\frac{r}{c}\right) \rightarrow b < r < c \quad \checkmark$$

→ $a < r < b$

$$V(r) - V(b) = - \frac{\rho_0 (b-a)}{\epsilon_0 k_2} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \quad \checkmark$$

$$V(r) = - \frac{\rho_0 (b-a)}{\epsilon_0 k_2} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{\rho_0 (b-a)}{\epsilon_0 k_2} \ln\left(\frac{b}{c}\right)$$

→ $r < a$:

$$V(r) - V(a) = - \int_a^r \cancel{E} dr \stackrel{=0}{\text{por qd } \vec{E}} - V(r) = V(a) \quad \checkmark$$

$$\therefore V(r) = \frac{\rho (a-b)}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{\rho (b-a)}{\epsilon_0 k_2} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

d) En la sup. externa del conductor, la carga es cero, ya que todos los cargas se van por el cable a tierra.

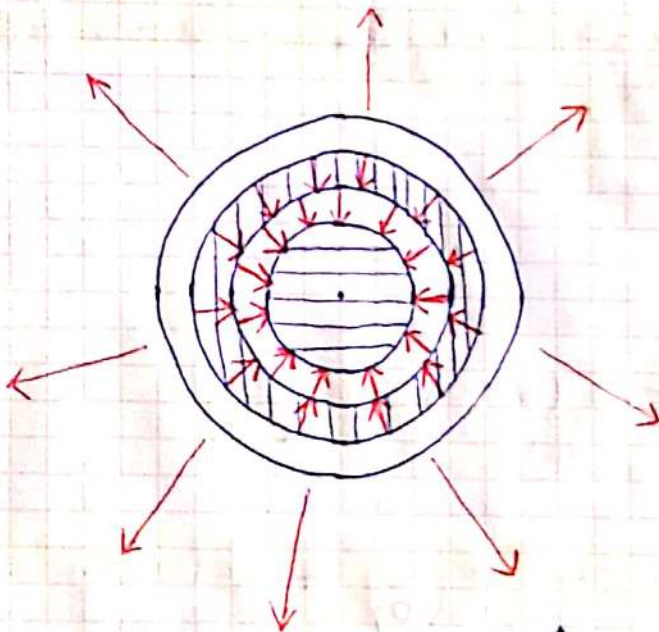
• Por otro lado, en la sup. interior, las cargas son positivas.

$$\sigma_{int} = \frac{Q_{enc}}{Area} \rightarrow \sigma_{int} = \frac{-\rho_0(b-a) \cdot 2\pi r}{c \cdot 2\pi r}$$

$$\sigma_{int} = \frac{-\rho_0(b-a)}{c}$$



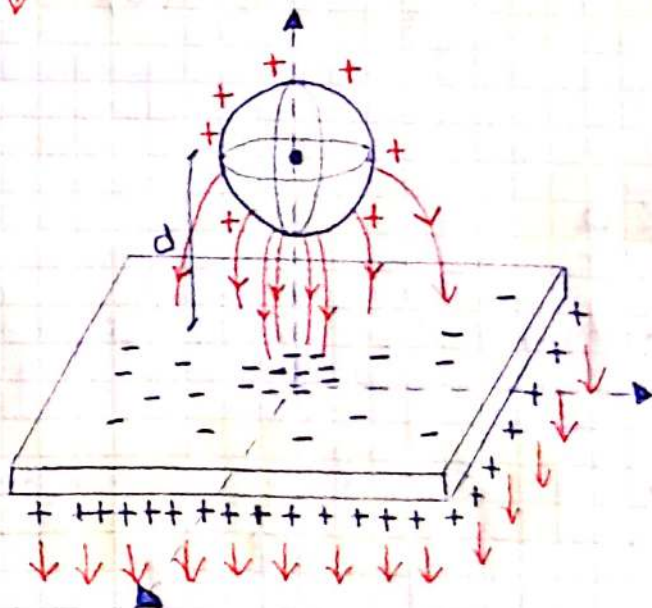
e)



Problema N° 3:

3)

$$\sigma(r) = \frac{-\sigma_0}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$



b) Encuentre el valor de σ_0 :

$$-Q = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma_0 r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} d\phi dr \dots =$$

$$= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma_0 r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} d\phi =$$

$$= \int_0^\infty -\frac{\sigma_0 2\pi}{u^{3/2}} \frac{du}{2} = -\frac{1}{2} 2\pi \int_0^\infty \sigma_0 u^{-3/2} du \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{CA:} \\ u = r^2 + d^2 \\ du = 2r dr \\ \frac{du}{2} = r dr \end{array} \right.$$

$$= -\pi \left[\frac{-2\sigma_0}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right]_0^\infty = -\pi \left[\frac{2\sigma_0}{d} \right]$$

$$-Q = -\frac{2\pi\sigma_0}{d} \rightarrow$$

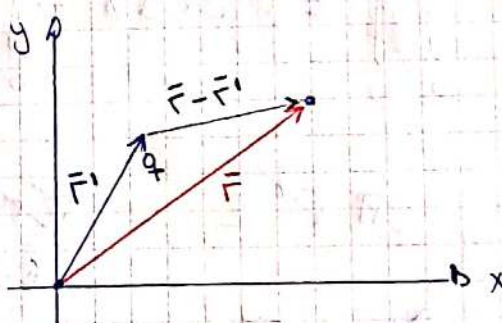
$$\sigma_0 = \frac{Qd}{2\pi}$$

c) $E_{\text{ext}} = 0$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{r} = (0, 0, d) ; \vec{r}' = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (-r \cos \phi, -r \sin \phi, d)$$



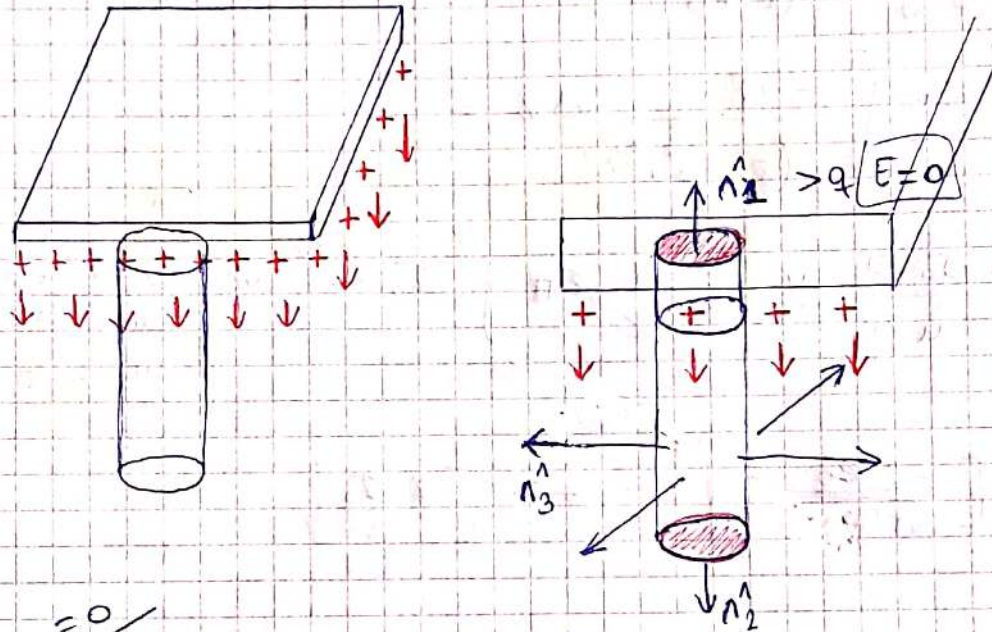
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + d^2}$$

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_0}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} (-r \cos \phi, -r \sin \phi, d) r dr d\phi$$

NOTA

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma_0}{(r^2 + d^2)^{3/2}} (-r^2 \cos\phi \hat{i} - r^2 \sin\phi \hat{j} + d \hat{k}) dr d\phi$$

d)



$$\cancel{\iint E \cdot \hat{n}_1} + \iint E \cdot \hat{n}_2 + \cancel{\iint E \cdot \hat{n}_3} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

xq $E=0$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \vec{E} \cdot \hat{n}_2 r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\sigma r}{\epsilon_0} dr d\phi$$

$$\cancel{\pi r^2} E = \frac{\cancel{\pi r^2} \sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{k})$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{A\epsilon_0} (-\hat{k})$$

$$Q = \iint \sigma ds$$

$$Q = A\sigma$$

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

NOTA