

SISTEMAS DE CONTROL AVANZADO – Segundo Parcial – 1^{er} cuatrimestre 2009

Nombre:

LU:

Nro de hojas:

1. Dada la siguiente representación en variables de estado de una sistema y las funciones $V_1(x_1, x_2)$,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_2^2(t) - 2x_1(t)e^{-(x_1^2(t)+x_2^2(t))} \\ x_2(t) + x_1(t)x_2(t) - 2x_2(t)e^{-(x_1^2(t)+x_2^2(t))} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} V_1(x_1, x_2) &= 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 \\ V_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

elija una que resulte adecuada como candidata a función de Lyapunov justificando su elección y analice, de ser posible, si el punto de equilibrio en el origen es local o globalmente: estable, asintóticamente estable o inestable.

2. El modelo discreto en variables de estado de un sistema está dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

donde la salida $y(k)$ es la única variable medida y $T = 0,1$ seg. Se desea implementar un control por realimentación estática de estados para estabilizarlo con matriz de ganancias $L = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$.

- Verifique que el sistema a lazo abierto es observable.
 - Diseñe un observador predictor de estados de orden completo suponiendo las mediciones ruidosas. Escriba las ecuaciones resultantes del sistema con el observador.
 - Diseñe un observador de estado de orden reducido para estimar la variable x_2 y escriba las ecuaciones resultantes sistema-error de observador.
 - Considere ahora la realimentación de estados indicada al comienzo y determine los polos de lazo cerrado de cada sistema con el sistema con el observador correspondiente incluido. Justifique el procedimiento.
3. a) ¿Por qué un regulador basado en un observador de orden completo tiene generalmente márgenes de estabilidad menores que un regulador estándar (es decir, basado directamente en realimentación de estados)?
- b) Dado que en el diseño de un regulador para un sistema controlable se pueden asignar los polos en cualquier región del plano complejo z , ¿Cuáles consideraciones tendría en cuenta para una apropiada asignación de los mismos en sistemas discretos (explicarla con palabras o gráficos)? ¿Cuáles asignaciones evitaría y por qué?
- c) De acuerdo a su experiencia en el diseño de reguladores en las clases prácticas y los laboratorios: ¿cuál de los diferentes métodos cree que tiene una gran versatilidad y le ha dado los mejores resultados?

4. Para una planta representada por las siguientes ecuaciones de estado discretas,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

considere que se conecta a continuación, en cascada, un controlador representado por ecuaciones de estado discretas con matrices

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si $r(k)$ es la entrada de referencia y el sistema se realimenta con los estados a través de una matriz de ganancia constante conveniente $u(k) = -Lx(k)$, plantee las ecuaciones de estado del sistema total y analice que tipo de entradas puede seguir el sistema y qué tipo de perturbaciones puede rechazar.

5. Fundamente por qué se eligen funcionales como $J_N = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k))$ para formular el problema de control óptimo. ¿Qué condiciones deben cumplir las matrices Q y R , y por qué?

$$V_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 \quad \text{es POSITIVA}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2^2 - 2x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \\ x_2 + x_1x_2 - 2x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) &= 8x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 + 4x_2 \dot{x}_1 + 4x_1 \dot{x}_2 \\ &= 8x_1 (x_1 - x_2^2 - 2x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}) + 2x_2 (x_2 + x_1x_2 - 2x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}) \\ &\quad + 4x_2 (x_1 - x_2^2 - 2x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}) + 4x_1 (x_2 + x_1x_2 - 2x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &8x_1^2 - 8x_1x_2^2 - 16x_1^2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} + 2x_2^2 + 2x_1x_2^2 - 4x_2^3 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} + 4x_2x_1 - 4x_2^3 \\ &- 8x_1x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} + 4x_1x_2 + 4x_1^2x_2 - 8x_1x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &8x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2^2 - 4x_2x_1 + 4x_1x_2 + 4x_1^2x_2 + 4x_1x_2 \\ &8x_1x_2^2 - e^{-(x_1^2 + x_2^2)} (16x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_2) - 4x_2^3 \\ &\quad \underbrace{(16x_1x_2 + 4x_1^2 + 2x_2^2)}_{(4x_1 + 2x_2)^2} \end{aligned}$$

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad \text{es POSITIVA}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (x_1 - x_2^2 - 2x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}) + x_2 (x_2 + x_1x_2 - 2x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}) \\ &= x_1^2 - x_1x_2^2 - 2x_1^2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} + x_2^2 + x_1x_2^2 - 2x_2^2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \\ &= x_1^2 + x_2^2 - e^{-(x_1^2 + x_2^2)} (2x_1^2 + 2x_2^2) = x_1^2 + x_2^2 (1 - 2e^{-(x_1^2 + x_2^2)}) \end{aligned}$$

Para $x_1^2 + x_2^2 < 0,64$ es DEFINIDAMENTE NEGATIVA

Por lo cual es ASINTOTICAMENTE ESTABLE

SISTEMAS DE CONTROL AVANZADO
Segundo Coloquio - 1^{er} cuatrimestre 2007

Nombre: Mio 36 Nota: _____
LU: _____ Nro de hojas: _____

1. Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

y la función candidata $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$, puede sacar alguna conclusión respecto a la estabilidad del sistema respecto del punto de equilibrio en el origen? Justifique su respuesta.

2. El modelo discreto en variables de estado de un sistema está dado por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

donde la salida y es la única variable que puede medirse. Se implementa un control por realimentación estática de estados para estabilizar, empleando una matriz de ganancias $L = \begin{bmatrix} 1/4 & 2 \end{bmatrix}$.

- Verificar que el sistema es observable.
- Diseñar un observador de estados predictor de orden total. Discutir la selección de polos del observador. Plantear las ecuaciones del sistema total resultante.
- Diseñar un observador de estado de orden reducido. Plantear las ecuaciones del nuevo sistema resultante.
- Determinar en cada caso los polos de lazo cerrado con el control y el observador incluidos. En qué afecta el uso de observadores a la determinación de estos polos? Justifique.

3. Dado el sistema de seguimiento cuyo modelo en VE es el siguiente:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

se desea que el sistema pueda copiar con exactitud referencias de tipo rampa y rechazar perturbaciones senoidales con $\omega_0 = 2$ rad/seg. Determine la dinámica que debe ser agregada al sistema para lograrlo y las ecuaciones y diagrama bloque del sistema resultante.

- Dado que en el diseño de un regulador para un sistema controlable se pueden asignar los polos en cualquier región del plano complejo z , ¿Cuáles consideraciones tendría en cuenta para una apropiada asignación de los mismos en sistemas discretos (explicarla con palabras o gráficos)? ¿Cuáles asignaciones evitaría y por qué?
- ¿Por qué un regulador basado en un observador de orden completo tiene generalmente márgenes de estabilidad menores que un regulador estándar (es decir, basado directamente en realimentación de estados)? ¿Cuál es la causa de esta degradación? Complemente su explicación con gráficas en caso de ser necesario.
- Describa cómo elegir los polos de los observadores de orden completo con el fin de no desmejorar los márgenes de estabilidad de acuerdo a las consideraciones de Doyle-Stein.

①

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

$$V(x) = x_1^4 + x_2^4$$

$V(x)$ es positiva.

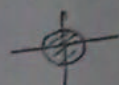
$$\dot{V}(x) = 2x_1 \dot{x}_1 + 4x_2^3 \dot{x}_2 = 2x_1 (x_1^3 (x_1^2 + x_2^2 - 1)) + 4x_2^3 (x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1))$$

$$2x_1^4 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + 4x_2^4 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = (x_1^2 + x_2^2 - 1) 2(-x_1^4 + 2x_2^4)$$

ESTA DEFINIDA NEGATIVA PARA $x_1^2 + x_2^2 < 1$.
ASINTOTICAMENTE ESTABLE

ESTA SEMI DEFINIDA POSITIVA PARA $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$.
ESTABLE

PARA $x_1^2 + x_2^2 > 1$ ESTA DEFINIDA POSITIVA
ES INESTABLE.



②

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y = [1 \ 0] x(k) \quad \text{con } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = [1/4 \ 2]$$

$$W_0 \begin{bmatrix} c \\ ca \\ ca^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det = 1 \neq 0$ ES DE RANGO COMPLETO EL OBS.

$$x(k+1) = \phi(k) + \Gamma u(k)$$

$$u(k) = -[L_1 \ L_2] x(k)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/4 & 2 \end{bmatrix}$$

PARA HAYAR LOS POLOS DE LAZO CERRADO. HAGO.

$$\det(\lambda I - \phi(k) + \Gamma u(k)) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1/4 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \quad \lambda^2 - \lambda - 1/4 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1/4)}}{2} = 0.5$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 1/4$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 1/4$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 15/4 = 0$$

dos: PONGO SVELOS MAS LEJOS $\lambda = 0,03125$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-k_1 & 1 \\ -k_2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1+k_1 & -1 \\ k_2 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-1+k_1)(\lambda-2) - k_2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 + \lambda k_1 - 2k_1 - k_2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 + \lambda k_1 - 2k_1 - k_2 = 0$$

$$\lambda^2 - B\lambda - A = 0$$

$$k_1 - 3 = -B$$

$$k_1 = -B + 3$$

$$2 - 2(-B + 3) - k_2 = 0 \Rightarrow 2 + 2(B + 3) - 4 = k_2$$

$$X[k+1] = [\phi - Kc] \hat{X}[k] + \Gamma U[k] + K \cdot Y[k]$$

Para reducirlo.

$$\phi_{22} - Kc_2 \phi_{12} = 0,03125$$

$$2 - K \Delta L = 0,03125 \Rightarrow K = 2 - 0,03125$$

$$F = \phi_{22} - Kc_2 \phi_{12}$$

$$G = (\phi_{21} - Kc_1 \phi_{11}) c^{-1} + \Gamma K$$

$$H = \Gamma_2 - Kc_2 \Gamma_1$$

$$\left. \begin{aligned} Z[k+1] &= F Z[k] + G Y[k] + H[k] U[k] \\ \hat{X} &= Z[k] + Y[k] K \end{aligned} \right\} \text{ como ARHO la ecuación ???}$$

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(k)$$

$$Y(k) = (1 \ 0) X(k)$$

EL SISTEMA TIENE UN POLO EN EL ORIGEN POR LO QUE SOLO TENGO QUE AGREGAR UN POLO EN EL ORIGEN PARA PODER SEGUIR A LA RAMPA. Y LUEGO AGREGAR DOS EN $\pm j2$ PARA RECONSTRUIR LA ONDA SEÑAL

$$A_r = (0, 1) \quad \Delta_1 \{(-j2, 1) \ (-j2, 1)\} \quad \Delta = \{(0, 1), (-j2, 1), (j2, 1)\}$$

$$f(z) = (z - e^{0j}) (z - e^{j2T}) (z - e^{-j2T}) = (z - 1) (z^2 - 2 \cos(2T) z + 1)$$

$$z^3 - 2 \cos(2T) z^2 + z - z^2 + 2 \cos(2T) z - 1 = z^3 - z^2 (2 \cos(2T) + 1) + z (2 \cos(2T) + 1) - 1$$

$$\Phi_A = \begin{bmatrix} +2 \cos(2T) - 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 \cos(2T) - 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_A = \begin{bmatrix} 2 \cos(2T) - 1 \\ -2 \cos(2T) - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_D = \begin{bmatrix} 2 \cos(2T) - 1 \\ -2 \cos(2T) - 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_D = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

SISTEMAS DE CONTROL AVANZADO

Segundo Coloquio 2009

Nombre y Apellido

Nro. Hojas

1. El modelo discreto en variables de estado de un sistema está dado por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$

y se sabe que la salida y es la única variable que se puede medir. Se desea estabilizar el sistema mediante un control por realimentación estática de estados, empleando una matriz de ganancias $L = [1/2 \quad 2]$.

- Verificar que el sistema es observable.
 - Diseñar un observador de estados predictor de orden total. Discutir la selección de polos del observador considerando que las medidas son afectadas por ruido.
 - Diseñar un observador de estado de orden reducido.
 - Determinar en cada caso los polos de lazo cerrado del sistema con el control y el observador incluidos. Al incluir el observador, ¿debe recalcular los polos asignados inicialmente? ¿Por qué?
2. Considere el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^5 - x_1^4 \end{cases}$$

y la función candidata Lyapunov $V(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_2^2$.

- Determine los valores de las constantes a y b que permiten asegurar la estabilidad asintótica del sistema respecto del punto de equilibrio en el origen. Justifique su respuesta.
 - ¿Puede decir que la estabilidad asintótica resulta global?
3. Dado el sistema de seguimiento cuyo modelo en VE es el siguiente:
- $$x(k+1) = -\frac{1}{2}x(k) + u(k), \quad y(k) = 2x(k)$$
- Diseñe un controlador para lograrlo, ubicando los polos de LC de un modo conveniente.
 - Si, además, se deseara rechazar perturbaciones de tipo senoidales de frecuencia $\omega_0 = 50$ [rad/seg], plantee cómo resolvería el problema (sin calcular la ganancia de realimentación).
4. ¿Por qué un regulador basado en un observador de orden completo tiene generalmente márgenes de estabilidad menores que un regulador estándar (es decir, basado directamente en realimentación de estados)? ¿Cuál es la causa de esta degradación? Complemente su explicación con gráficas en caso de ser necesario.
5. Explique la diferencia entre los llamados observadores por predicción y los denominados observadores actualizados. Utilice fórmulas para completar su explicación.
6. Fundamente por qué se eligen funcionales como $J_N = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k))$ para formular el problema de control óptimo. ¿Qué condiciones deben cumplir las matrices Q y R ?

$$X[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

$$Y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X[k]$$

$$L = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ es de Rango 2 es OBS.}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Los polos del sistema cerrado son.

$$\det [\lambda I - \phi - \Gamma L] = \det \left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix} \right]$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1/2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1/2 \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = \frac{-1 \pm j \frac{1}{2}}{2}$$

Como la señal es ruidosa solo las observo buscando las resp. p.

$$\begin{cases} p_1 & 0,702 \quad \underline{14s} & \text{obs.} & 0,35 \quad \underline{14s} & = 0,24 + 0,24j \\ p_2 & 0,702 \quad \underline{-14s} & & 0,35 \quad \underline{-14s} & = 0,24 - 0,24j \end{cases} \Rightarrow \text{polos del obs.}$$

$$\phi - K C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + k_1 & -1 \\ +k_2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda + k_1)(\lambda - 3) + k_2 = \lambda^2 + (k_1 - 3)\lambda - 3k_1 + k_2$$

$$(\lambda - 0,24 + 0,24j)(\lambda - 0,24 - 0,24j) = \lambda^2 - 0,48\lambda + 0,1152 = \lambda^2 + (k_1 - 3)\lambda - 3k_1 + k_2$$

$$\lambda^2 - 0,48\lambda + 0,1152 = \lambda^2 + (k_1 - 3)\lambda - 3k_1 + k_2$$

$$k_1 - 3 = -0,48 \Rightarrow k_1 = 2,52$$

$$0,1152 = -7,56 + k_2 \Rightarrow k_2 = 7,67$$

$$\phi_{12} = K \phi_{11}$$

EN ORDEN REDUCIDO SOLA TERCEO
EN CUENTA LA PARTE REAL ?

$$3 - k_1 \cdot 1 = 0.24$$

$$k_1 = 3 - 0.24 = 2.76$$

1) NO DEBIDO A QUE POR EL PRINCIPIO DE SEPARACIÓN LO DINAMICO DEL OBS. NO AFECTA AL SISTEMA.

2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^5 - x_1^4 \end{cases}$$

$$V(x_1, x_2) = Ax_1^4 + Bx_2^3$$

$V(x)$ TIENE QUE SER POSITIVA POR LO QUE $A > 0$ Y $B > 0$.

ADemás $\dot{V}(x)$ TIENE QUE ESTAR DEFINIDA NEGATIVA

$$4Ax_1^3(-x_1^3 + x_1 x_2) + 3Bx_2^2(-x_2^5 - x_1^4) < 0.$$

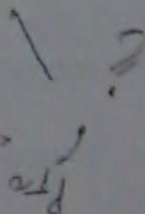
$$-4Ax_1^6 + 4Ax_1^4 x_2 - 3Bx_2^7 - 3Bx_1^4 x_2$$

$$x_1^4 x_2 (4A - 3B) - 4Ax_1^6 - 3Bx_2^7 \text{ PARA QUE SEA DEFINIDA NEGATIVA}$$

$$4A - 3B = 0 \Rightarrow 4A = 3B \Rightarrow \boxed{A = \frac{3B}{4}}$$

∴ COMO $V(x)$ ES POSITIVA Y $\dot{V}(x)$ ES NEGATIVA EL SISTEMA RESPECTO A ESE PTO DE EQUILIBRIO ES ASINTOTICAMENTE ESTABLE

SI SE PUEDE DECIR YA QUE SI EN ALGUN PTO EL SISTEMA EN $V(x)$ NO ESTABA DEFINIDA NEGATIVA, EL SISTEMA SERIA ESTABLE + INESTABLE, PERO NO ASINTOTICAMENTE ESTABLE



$$x(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + u(k)$$

$$y = 2x(k)$$

$$\Delta r = (z-1)$$

$$\phi_d [2]$$

$$\Gamma_d [1]$$

$$\phi_D \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_D \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I - \phi - \Gamma L$$

Polos del sistema de lazo cerrado

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [L_1 \ L_2] = \det \begin{bmatrix} 1 - 1/2 + L_1 & +L_2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1/2 + L_1)(\lambda - 1) + 2L_2$$

$$\lambda^2 + (L_1 - 1 - 1/2)\lambda + 2L_2$$

$$L_1 - \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow L_1 = 0,5$$

$$2L_2 = 0,25 \Rightarrow L_2 = 0,125$$

$$(\lambda - 0,5) (\lambda - 0,5)$$

$$\lambda^2 - \lambda + 0,25$$

$$\Lambda = (e^{T\Delta}) \cdot (s\omega_0, 1) \begin{bmatrix} -s\omega_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = (z - e^{0T}) (z - e^{-j\omega_0 T}) (z - e^{j\omega_0 T})$$

Obtengo los S_i y armo las matrices del sistema resultante, luego lo relaciono con la ganancia K del u para obtener un control adecuado.

SISTEMAS DE CONTROL AVANZADO

Segundo Coloquio – 1^{er} cuatrimestre 2008

Nombre y Apellido:.....Nota:.....

LU:.....Nro de hojas:.....

1. Considere el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_2^3 + u\end{aligned}$$

y la función candidata de Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

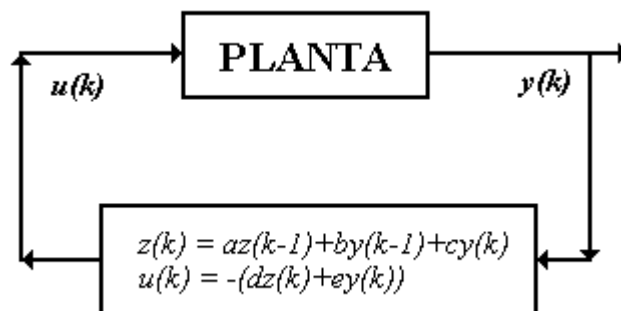
- ¿Puede sacar alguna conclusión respecto de la estabilidad del punto de equilibrio en el origen, cuando $u = 0$? Justifique su respuesta.
- Si $u = L_1 x_1 + L_2 x_2$, ¿pueden elegirse las constantes L_1 y L_2 para asegurar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio en el origen? Justifique su respuesta.

2. El modelo discreto en variables de estado de un sistema está dado por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$

se desea implementar un control por realimentación estática de estados para estabilizar y regular, empleando una matriz de ganancias $L = [1/4 \quad 2]$, sin embargo la salida y es la única variable que puede medirse.



- Verificar que el sistema es observable.
- Diseñar un observador de estado de orden reducido y ajustar los parámetros a , b , c , d y e , del controlador con dinámica: $z(k+1) = az(k) + by(k) + cy(k+1)$, y su ecuación de salida (acción de control): $u(k) = -(dz(k) + ey(k))$, para obtener la regulación deseada.
- Determinar los polos de lazo cerrado (con el regulador y el observador incluidos). ¿En qué afecta el uso de observadores en la determinación de estos polos? Justifique.
- Si se desea además que el sistema rechace perturbaciones del tipo escalón, ¿cómo modificaría al controlador? (plantee el nuevo diseño sin recalcular las ganancias del regulador)

3. Para el diseño de reguladores basados en observadores:

- ¿Por qué un regulador basado en un observador tiene generalmente márgenes de estabilidad menores que un regulador estándar? ¿Cuál es la causa de tal deterioro?
- ¿Cómo elegiría los polos del observador con respecto a los polos de un regulador para que tenga un funcionamiento armonioso?

4. Fundamente por qué se eligen funcionales como $J_N = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k))$ para formular el problema de control óptimo. ¿Qué condiciones deben cumplir las matrices Q y R , y por qué? ¿En qué casos utilizaría el diseño de un regulador óptimo por sobre el de un regulador estándar?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2^3 + \mu \end{cases}$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$V(x)$ ES POSITIVO.

$$\dot{V}(x) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = (-x_1 + x_2^2) 2x_1 + 2x_2 (x_1 x_2 - x_2^3) =$$

$$= -2x_1^2 + 2x_1 x_2^2 + 2x_2^2 x_1 - 2x_2^4 = -2x_2^4 + 4x_1 x_2^2 - 2x_1^2 = -2(x_2^4 - 2x_1 x_2^2 + x_1^2)$$

$-2(x_2^2 - x_1)^2$ ES SEMI DEFINIDA NEGATIVA, EL SISTEMA ES ESTABLE

$$\dot{V}_x = 2x_1 (-x_1 + x_2^2) + 2x_2 (x_1 x_2 - x_2^3 + L_1 x_1 + L_2 x_2) =$$

$$-2x_1^2 + 2x_1 x_2^2 + 2x_2^2 x_1 - 2x_2^4 + 2x_1 x_2 L_1 + 2x_2^2 L_2 =$$

$$-2x_1^2 + 4x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 L_1 + 2x_2^2 L_2 - 2x_2^4 = -2x_1^2 + 4x_1 x_2^2 - 2x_1 x_2^2 - 2x_2^2 x_1 - 2x_2^4$$

$$\text{Si } L_1 = -x_2 \text{ y } L_2 = -x_1$$

COMO $V(x)$ ES DEFINIDA POSITIVA Y $\dot{V}(x)$ ES DEFINIDA NEGATIVA

LA FUNCION ES ASINTOTICAMENTE ESTABLE

SI QUIERO QUE SE CONSTANTE

$$-2x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 L_1 + 2x_2^2 L_2$$

$$-2(x_2^2 - x_1)^2 + 2x_1 x_2 L_1 + 2x_2^2 L_2$$

SI $L_1 \neq 0$ Y $L_2 \neq 0$ SE QUEDA DEFINIDA NEGATIVA POR LO
TANTO ES ASINTOTICAMENTE ESTABLE

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(k)$$

$$Y(k) = [1 \ 0] X(k)$$

$$L = [1/4 \ 2]$$

ARMAR EL SISTEMA REALIMENTADO

$$X(k+1) = \phi(k) + \Gamma U(k), \quad \text{DONDE } U(k) = [L_1 \ L_2] [X(k)] \quad \text{Y } \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

ojo ACONCERTAR DE LA REALIMENTACIÓN !!

$$[k+1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1/4 \ 2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

BUSCAR LOS POLOS POR LOS CERRADOS DEL SISTEMA

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1/4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1/4 = \lambda^2 - \lambda + 1/4 = 0,5 \Rightarrow (\lambda - 0,5)^2$$

SON LOS QUE NOS HACEN LAS IMPULSOS LOS PÓLOS DEBERÍAN SER EN $(\lambda - 0,03125)^2$

SEA $(\phi_{11} - k \phi_{12}) = 0,03125$ ADEMAS BUSCAR LOS PÓLOS, EN ESTE CASO COMO EL OPORTO CALCULAMOS

$$\phi_{22} - k \phi_{12} = 0,03125$$

$$2 - k \cdot 1/2 = 0,03125 \Rightarrow k = 2,03125 \text{ --- ML}$$

CALCULO H Y F

$$U(k) = -\frac{1}{4} x_1 = -\hat{x}_2$$

$$Z(k+1) = F Z(k) + G Y(k) + H U(k)$$

$$Z(k) + k Y(k) = \hat{x}_2$$

ENTONCES OBTENEMOS QUE $A = F \quad B = G \quad C = 0$

$$D = 1 \quad \text{Y } E = k$$

ML
CALCULAR
NUEVAMENTE

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

como la ecuación del observador reducida

$$z(k+1) = F z(k) + G y(k)$$

$$\hat{z} = z(k) + k y(k)$$

es la union de los polos del sistema a una entrada y del observador

que que seguir una rampa por lo que tenemos que tener
3 polos en el origen, para el sistema tiene uno, por lo que
lo tenemos que añadir un solo polo, para alcanzar los otros dos de
los dos polos en $z = 1$.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = [1 \ 0] x(k)$$

$$\Lambda_r = \{(0,1)\} \quad \Lambda_o = \{(1/2, 1) \ (-1/2, 1)\} \quad \Lambda = \{(0,1), (1/2, 1), (-1/2, 1)\}$$

$$(z-1)(z-e^{j2\pi}) (z-e^{-j2\pi}) = (z-1)(z^2 - z e^{j2\pi} - z e^{-j2\pi} + 1)$$

$$(z-1)(z^2 - 2z \cos 2\pi + 1) = z^3 - 2z^2 \cos 2\pi + z - z^2 + 2z \cos 2\pi - 1$$

$$z^3 - z^2(2 \cos 2\pi + 1) + z(2 \cos 2\pi - 1) - 1$$

$$\phi_A = \begin{bmatrix} 2 \cos 2\pi + 1 & 1 & 0 \\ -(2 \cos 2\pi + 1) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_A = \begin{bmatrix} 2 \cos 2\pi + 1 \\ -(2 \cos 2\pi + 1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_D = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ \Gamma_D \phi & \phi_D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (2 \cos 2\pi + 1) & 0 & (2 \cos 2\pi + 1) & 1 & 0 \\ -(2 \cos 2\pi + 1) & 0 & -(2 \cos 2\pi + 1) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_D \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE CONTROL AVANZADO
Segundo Coloquio - 1^{er} cuatrimestre 2007

Nombre: Mio 36 Nota: _____
LU: _____ Nro de hojas: _____

1. Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

y la función candidata $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$, puede sacar alguna conclusión respecto a la estabilidad del sistema respecto del punto de equilibrio en el origen? Justifique su respuesta.

2. El modelo discreto en variables de estado de un sistema está dado por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

donde la salida y es la única variable que puede medirse. Se implementa un control por realimentación estática de estados para estabilizar, empleando una matriz de ganancias $L = \begin{bmatrix} 1/4 & 2 \end{bmatrix}$.

- Verificar que el sistema es observable.
- Diseñar un observador de estados predictor de orden total. Discutir la selección de polos del observador. Plantear las ecuaciones del sistema total resultante.
- Diseñar un observador de estado de orden reducido. Plantear las ecuaciones del nuevo sistema resultante.
- Determinar en cada caso los polos de lazo cerrado con el control y el observador incluidos. En qué afecta el uso de observadores a la determinación de estos polos? Justifique.

3. Dado el sistema de seguimiento cuyo modelo en VE es el siguiente:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

se desea que el sistema pueda copiar con exactitud referencias de tipo rampa y rechazar perturbaciones senoidales con $\omega_0 = 2$ rad/seg. Determine la dinámica que debe ser agregada al sistema para lograrlo y las ecuaciones y diagrama bloque del sistema resultante.

- Dado que en el diseño de un regulador para un sistema controlable se pueden asignar los polos en cualquier región del plano complejo z , ¿Cuáles consideraciones tendría en cuenta para una apropiada asignación de los mismos en sistemas discretos (explicarla con palabras o gráficos)? ¿Cuáles asignaciones evitaría y por qué?
- ¿Por qué un regulador basado en un observador de orden completo tiene generalmente márgenes de estabilidad menores que un regulador estándar (es decir, basado directamente en realimentación de estados)? ¿Cuál es la causa de esta degradación? Complemente su explicación con gráficas en caso de ser necesario.
- Describa cómo elegir los polos de los observadores de orden completo con el fin de no desmejorar los márgenes de estabilidad de acuerdo a las consideraciones de Doyle-Stein.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_2^3 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases} \quad U_x = 2x_1 \dot{x}_1 + 4x_2^3 \dot{x}_2$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_x &= 2x_1 [x_1^3 (x_1^2 + x_2^2 - 1)] + 4x_2^3 [x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1)] \\ &= 2x_1^4 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + 4x_2^4 (x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned}$$

- Si $x_1^2 + x_2^2 < 1$ ES DEFINIDA NEGATIVA ASINTOTICAMENTE ESTABLE
 Si $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ " " " ESTABLE
 Si $x_1^2 + x_2^2 > 1$ " DEFINIDA POSITIVA INESTABLE

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(k) \quad Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(k)$$

$$L_c \begin{bmatrix} 1/4 & 3 \end{bmatrix}$$

MITOS
OBSERVABLE

$$w_0 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \det = 2 \text{ lo que } \neq 0 \text{ ES OBSERVABLE.}$$

¿cómo es completo? $\det(\phi - KC)$ predictivo completo

$\det(\phi - KC)$ para mover los polos

completo actualizado

$$(1 - KC)\phi$$

reducido actualizado

$$(\phi_{22} - KC_2\phi_{12})$$

Los sistemas realimentados están dados por $(x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k))$

$$\text{donde } U(k) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} [x(k)] \text{ y } \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$iii) - \phi = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} [L_1 \ L_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c[k+1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - \phi_1) \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1/4 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) + 1/4 = \lambda^2 - \lambda + 1/4 = (\lambda - 0,5)^2$$

$$= \frac{1-1}{1-0,5}$$

Como elegimos los polos mas rapido para el observador

$$(\lambda - 0,03125)^2 \quad \lambda^2 - 0,0625\lambda + 0,9765 \cdot 10^{-3}$$

$$(\phi - kC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (\phi - kC)) = \det \begin{bmatrix} \lambda - (1+k_1) & 1 \\ +k_2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - (1+k_1))(\lambda - 2) - k_2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 + k_1\lambda - 2k_1 - k_2 = \lambda^2 + \lambda(k_1 - 3) + 2 - 2k_1 - k_2 \quad \lambda^2 - 0,0625\lambda + 0,9765$$

$$k_1 - 3 = -0,0625 \Rightarrow k_1 = 2,9375$$

$$-2k_1 - k_2 + 2 = 0,9765 \cdot 10^{-3} \Rightarrow k_2 = 3,875$$

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ z[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi - rL & rL \\ 0 & \phi - kC \end{bmatrix} \quad \text{Pag 295.}$$

Reducido

$\det(\phi_{22} - kC_{12} \phi_{12}) =$ poder asignar los polos.

$$2 - k_1 = 0,03125 \Rightarrow -k_1 = 0,03125 - 2 \Rightarrow \boxed{k_1 = 2,03125}$$