Departamento de
INGENIERÍA QUÍMICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
UNS
BAHÍA BLANCA

Métodos Teóricos en Ingeniería B 2021 – 2do Cuatrimestre
1er Examen Parcial (1/10/2021)

Realizar los ejercicios uno a continuación del otro, sin dejar espacios en blanco.
Colocar su NOMBRE y el número de la PÁGINA que está entregando para poder identificar claramente su examen.
Al finalizar indicar el total de PÁGINAS entregadas y firmar.

Práctica en Papel

Problema 1

Se conoce que la siguiente función tiene una forma lo suficientemente suave como para tratar de encontrar su mínimo mediante la búsqueda del punto que haga que los componentes del vector gradiente sean nulos:

$$f(x,y) = -8x + x^3 + 12y + 4y^2 - \frac{1}{100}xy^3$$

a) Encontrar la expresión del vector gradiente $\nabla f(x,y)$
b) Plantear las componentes del vector gradiente $\nabla f(x,y)$ como un sistema de ecuaciones no lineales.
c) Para encontrar el punto (x^*, y^*) que haga que todas las componentes sean nulas al mismo tiempo realizar un paso del Método de Newton-Raphson multivariable, partiendo del punto $[1 \quad -1]^T$. Calcular la norma 2 del error relativo de iteraciones sucesivas.
d) Utilizando los resultados del inciso c) como valores iniciales, realizar una iteración más, pero mediante el Método de Broyden con actualización de la inversa del Jacobiano con la fórmula:

$$H^{k+1} = H^k + \left(p^k - H^k y^k\right) \frac{{p^k}^T H^k}{{p^k}^T H^k y^k}$$

Calcular la norma 2 del error relativo de iteraciones sucesivas.

Problema 2

Se quiere averiguar cuál es el punto que corresponde a la curva $y = \mathrm{sen}(x)$ que pasa más cerca del punto $(2,2)$, como se muestra en la Figura 1. En otras palabras, se desea minimizar $D = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$.

a) Encontrar la expresión que debe minimizarse (**AYUDA**: es más fácil minimizar $D^2(x)$ que $D(x)$)
b) Encontrar el mínimo de la expresión obtenida en a) por un método de búsqueda de raíces de funciones de una variable (**no realizar más de 5 iteraciones**):
    a. Utilizar Método de la Secante con punto inicial $x_0 = 0$
    b. En cada iteración evaluar error relativo de iteraciones sucesivas y error absoluto de función.
    c. En cada iteración indicar la distancia del punto encontrado al punto $(2,2)$
c) Comentar sobre la velocidad de convergencia (si convergió o no, y si no lo hizo porqué)

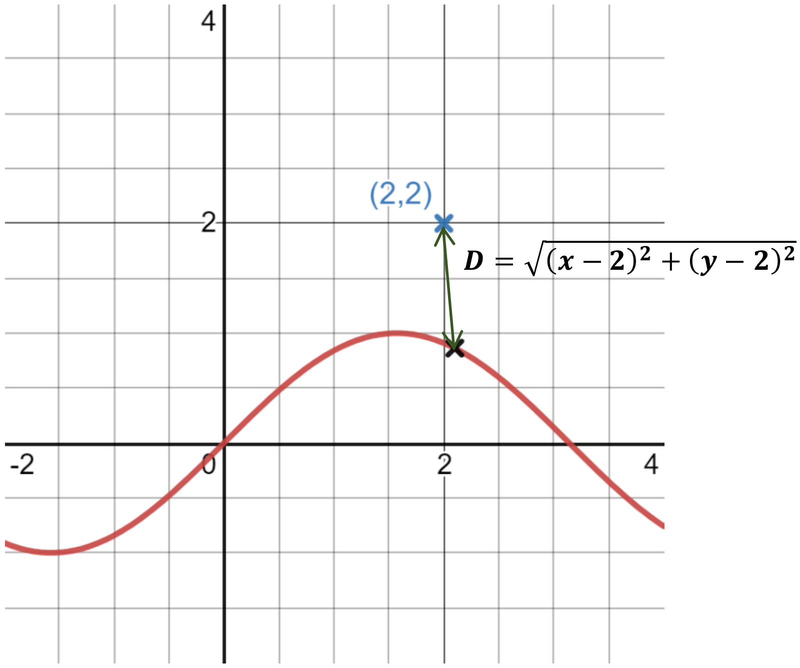

Figura 1

MÉTODOS TEÓRICOS EN INGENIERÍA B (COD: 6232)

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021. 1er EXAMEN PARCIAL. Fecha: 01/10/2021

PROBLEMA 1

Considere los puntos generados por la función

$$f(x) = e^{-x} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

En $x = [0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5]$

1) Con los puntos aproxime $f''(1)$ usando:
   a) La fórmula de diferencias finitas hacia atrás de $O(h)$
   b) La fórmula de diferencias finitas centrales de $O(h^2)$
   c) La fórmula de diferencias finitas hacia adelante de $O(h)$
   d) El valor verdadero es $f''(1) = -0.1906$. Calcule el error absoluto cometido con cada una de las aproximaciones. ¿Cuál de ellas es mejor?
   e)
2) La derivada primera de la función presenta una raíz en el intervalo dado para x. La fórmula es:

$$f'(x) = e^{-x}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

   a) Grafique la función e indique cuál es el valor aproximado de la raíz.
   b) Escriba un algoritmo para Regula Falsi que le permita hallar la raíz de una ecuación cuyos parámetros de entrada sean:
      - F, la función
      - $X1$, límite inferior del intervalo de búsqueda
      - $X2$, límite superior del intervalo de búsqueda
      - Tol, tolerancia aceptada
      - $Nmax$, número máximo de iteraciones

   El criterio de convergencia debe ser el error relativo porcentual entre iteraciones y el algoritmo debe imprimir:

      - Un mensaje en caso de que no se pueda asegurar que la raíz se encuentra en el intervalo proporcionado.
      - En cada iteración:
        - Número de iteración.
        - Los valores de $X1$ y $X2$ utilizados para el cálculo de la aproximación de la raíz.
        - La aproximación de la raíz.
        - El error cometido.
      - Cuando se alcance convergencia, un mensaje que indique claramente cuál es la raíz encontrada, en cuántas iteraciones y con qué error se llegó a la convergencia.
      - Un mensaje en caso de que no se encuentre la raíz en el número máximo de iteraciones.
   c) Utilice el algoritmo desarrollado en b) para encontrar la raíz de la derivada primera de la función de interés. Utilice $Tol = 10^{-7}$ y $Nmax = 9$.
   d) Utilice el comando específico de Octave para encontrar la raíz solicitada.

MÉTODOS TEÓRICOS EN INGENIERÍA B (COD: 6232)

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021. 1er EXAMEN PARCIAL. Fecha: 01/10/2021

PROBLEMA 02

Dado el sistema de ecuaciones

$$x_1^2 + x_2^2 = 10$$

$$e^{x_1} - x_2 = 1$$

1. Resolver este sistema utilizando el método de Broyden con actualización del Jacobiano con una tolerancia de $\|F_k\|_2 < 10^{-6}$.
2. Resolver este sistema utilizando el método de Broyden con actualización de la inversa del Jacobiano con una tolerancia $\frac{\|x_k - x_{k-1}\|_2}{\|x_k\|_2} < 10^{-3}$.

En ambos casos reportar (imprimir) el número de iteraciones necesarias para satisfacer la tolerancia pedida y el valor de la solución en la última iteración. Utilizar $x_0^T = [1\ 1]$ como punto inicial, y determinar el Jacobiano inicial analíticamente.

MÉTODOS TEÓRICOS EN INGENIERÍA B (COD: 6232)

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021. 1er EXAMEN PARCIAL. Fecha: 01/10/2021

PROBLEMA 03

La demanda en toneladas (Q) del producto de interés de una empresa es función de su precio unitario (p), como muestra la ecuación (1):

$$Q = 200 - 1.2 * p \qquad (1)$$

Los beneficios totales (B) de esta empresa vienen dados por la función (2)

$$B = p * Q - 100 - 5 * Q \qquad (2)$$

1. Utilizar el método de la secante para determinar el precio unitario p y la demanda Q, que maximizan los beneficios. Seleccionar puntos iniciales y criterios de convergencia adecuados.
2. ¿Cuántas iteraciones se requieren para resolver el problema? Justificar