

Nombre: L.U.:

Procesamiento Digital de Señales – Examen recuperatorio – 5 de diciembre de 2011

1. Verifique si el sistema caracterizado por la ecuación a diferencias $y[n] = \cos(\pi/3) y[n-1] + (1/4)^n x[n]$, con $y[-1] = 0$, es:
- lineal;
 - invariante en el tiempo;
 - causal;
 - estable.

2. Sea $x[n]$ una sucesión de longitud $N = 8$ dada por $x[n] = \{2, 0, 4, 0, 6, 0, 4, 0\}$, y sea $X[k]$ su TDF de 8 puntos.
- La TDF $X[k]$ ¿es real, imaginaria pura o compleja? ¿Por qué?
 - Evalúe las siguientes expresiones **sin calcular explícitamente** la TDF. **Justifique brevemente cada cómputo.**

(i) $X[0]$ (ii) $X[4]$ (iii) $\sum_{k=0}^7 X[k]$ (iv) $\sum_{k=0}^7 e^{j\frac{2\pi k}{8}2} X[k]$ (v) $\sum_{k=0}^7 |X[k]|^2$

- (c) ¿Es cierto que $X[k] = X[k+4]$, para $k = 0, 1, 2, 3$? Justifique

3. Para la función de sistema

$$H(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 1.5e^{-j(\pi/3)}z^{-1})(1 - 1.5e^{+j(\pi/3)}z^{-1})}{(1 - 0.7e^{-j(\pi/6)}z^{-1})(1 - 0.7e^{+j(\pi/6)}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

- Dibuje el diagrama de polos y ceros.
 - Calcule **todas** las respuestas impulsivas (asociadas a cada una de las regiones de convergencia) y determine si son: (i) causales; (ii) estables.
 - Para las sucesiones causales del inciso anterior aplique el teorema del valor inicial, y verifique el valor de $h[0]$.
 - Descomponga $H(z)$ como $H(z) = H_{M1}(z) H_{PT}(z)$, donde $H_{M1}(z)$ es de mínima fase y $H_{PT}(z)$ es pasatodo.
 - Dibuje el diagrama de polos y ceros de $H_{M1}(z)$ y de $H_{PT}(z)$.
 - Descomponga $H(z)$ como $H(z) = H_{FL}(z) H_{M2}(z)$, donde $H_{FL}(z)$ es de fase lineal generalizada y $H_{M2}(z)$ es de fase mínima [esta $H_{M2}(z)$ puede ser distinta de la $H_{M1}(z)$ del inciso (b)]
 - Dibuje el diagrama de polos y ceros de $H_{FL}(z)$ y de $H_{M2}(z)$.
 - Diseñe un compensador $H_C(z)$ para $H(z)$ de manera que $|H(z) H_C(z)| = 1$.
4. La señal $x(t) = 3 \cos(2\pi 100t) + 2 \cos(2\pi 400t)$ se muestrea a $f_s = 600$ Hz, obteniéndose la señal discreta $x[n]$.
- Dibuje el espectro $X(f)$ de $x(t)$.
 - Dibuje el espectro $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$, indicando las frecuencias discretas ω_i presentes en la señal.
 - Especifique la respuesta en frecuencia del filtro rector ideal.
 - Escriba la expresión analítica de la señal continua $x_r(t)$ que se obtiene al filtrar la señal $x[n]$ con un **filtro rector ideal**, indicando claramente las frecuencias presentes en la señal de salida.
 - Escriba la forma general de la señal continua $x_m(t)$ que se obtiene al filtrar la señal $x[n]$ con un **mantenedor de orden cero**, indicando claramente las frecuencias presentes en la señal de salida.
 - Especifique bajo qué condiciones el sistema que usa el **reconstructor ideal** se comporta como un sistema lineal.
 - Especifique bajo qué condiciones el sistema que usa el **mantenedor de orden cero** se comporta como un sistema lineal.

Serie de Fourier (SF)	Transformada de Fourier (TF)	Transf. de Fourier de señales discretas (TFTD)	Transf. Discreta de Fourier (TDF)
$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$	$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
Varios	$\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k = \frac{1-\rho^N}{1-\rho}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$	$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$	

dominio frecuencial (Ω)	dominio temporal	dominio frecuencial (f)
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c \left[\frac{1}{T_s} (\omega - 2\pi k) \right]$	$\Leftrightarrow x[n] = x_c(nT_s)$	$\Leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c \left[\frac{f_s}{2\pi} (\omega - 2\pi k) \right]$
$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$	$\Leftrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$	$\Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$
$Y_s(\Omega) = Y(e^{j\omega}) \Big _{\substack{\omega=\Omega \frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega T_s}}$	$\Leftrightarrow y_s(t) = \sum_n y[n] \delta(t - nT_s)$	$\Leftrightarrow Y_s(f) = Y(e^{j\omega}) \Big _{\substack{\omega=f \frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f T_s}}$
$Y_r(f) = H_r(\Omega) Y_s(\Omega)$ $= T_s H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \Big _{\substack{\omega=\Omega \frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega T_s}}$	$\Leftrightarrow y_r(t) = \sum_n y[n] h_r(t - nT_s)$	$\Leftrightarrow Y_r(f) = H_r(f) Y_s(f)$ $= T_s H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \Big _{\substack{\omega=f \frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f T_s}}$
$H_c(\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega}) \Big _{\substack{\omega=\Omega \frac{2\pi}{\Omega_s} \\ =\Omega T_s}}, \\ \text{si } \Omega < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}, \\ 0, \quad \text{caso contrario.} \end{cases}$		$H_c(f) = \begin{cases} H(e^{j\omega}) \Big _{\substack{\omega=f \frac{2\pi}{f_s} \\ =2\pi f T_s}}, \\ \text{si } f < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T_s}, \\ 0, \quad \text{caso contrario.} \end{cases}$

$$z^N = re^{j\theta} \Rightarrow z_k = \sqrt[N]{r} e^{j \frac{\theta + 2\pi k}{N}}, k=0,1,\dots,N-1$$

Transformada Bilineal: $s = \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}, \quad z = \frac{(2/T+s)}{(2/T-s)}, \quad \omega = 2 \arctan(\pi f T_d), \quad f = \frac{1}{\pi T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
Transformación al impulso: $h[n] = T_d h_c(t) \Big _{t=nT_d}$